

前言

1. 什么是拓扑学

一般认为, 拓扑学、分析学和代数学是现代基础数学的三个关键领域。拓扑学萌发于 17 世纪, 到 19 世纪末, 拓扑学理论才开始得到系统发展。在 20 世纪拓扑学是数学中发展最迅猛、成果最丰富的研究领域之一, 到了 21 世纪拓扑学的各种理论更是层出不穷。迄今为止, 拓扑学和发展拓扑学所产生的数学思想已经渗透到几乎所有的数学领域和众多的自然科学和社会科学领域。究竟什么是拓扑学?

先回到初等几何。初等几何研究欧氏空间中几何对象本身的形状、几何对象之间的位置关系等。几何对象自身的几何性质 (如边长、夹角、面积等) 十分重要。有时, 几何对象的若干几何性质可以完全决定几何对象。如, 判定两个三角形是否全等, 有很多判定条件 (如边边边、边角边、角边角等)。我们还知道, 全等的三角形有完全相同的几何性质; 如果两个三角形对应的几何性质不同, 则它们不全等。

注意, 上面提到的三角形的几何性质在刚体变换 (即平移、旋转、镜面反射的有限复合) 下是不变的。给定两个几何对象, 如果其中一个可以经过刚体变换变到另一个, 我们就说这两个几何对象是几何等价的。两个几何等价的几何对象有完全对应相同的几何性质。如果两个几何对象某种对应几何性质不同, 则可以断定这两个几何对象不是几何等价的。在这个意义下可以粗略地说, 初等几何研究的是几何对象在刚体变换下保持不变的性质。

类比于初等几何, 拓扑学中所用的变换是“弹性变换” (拓扑术语为拓扑变换, 或同胚变换)。所谓弹性变换就是一个连续双射, 其逆也连续。直观看来, 弹性变换可以对几何对象进行弯曲、拉伸、压缩、扭转等。这里理想地假设受到变形的几何对象具有弹性, 能充分地经受这样的操作。例如, 一个面团可以经过弹性变换揉成馒头或方糕, 也可擀成厚薄不同的圆饼。如果一个几何对象经过一个弹性变换变到另一个, 我们就说这两个几何对象是拓扑等价的。几何对象在弹性变换下保持不变的性质就称为拓扑性质。

经过弹性变换后,一个几何对象的大小、曲直、长短等几何性质都可以改变,它甚至可以变得面目全非,与之前大不相同。真有那样的性质,能在弹性变换下保持不变?答案是不仅有,而且很多就在我们身边。例如,区间是一维的,立方体是三维的,而维数是一个拓扑性质。又如,在球面上沿任何一条简单闭曲线剪开总是把球面剪成两片,但汽车轮胎(拓扑上称为环面)的表面上存在一条简单闭曲线,沿它剪开,轮胎并没有变成可以分离的两片,而曲面上是否存在一条不把它分离的简单闭曲线是一个拓扑性质,这个性质与所画曲线的大小和曲直都无关。再如,给平面(或球面)地图着色是要把相邻的国家(或区域)着上不同的颜色,以便容易区分。已经知道四种颜色就够了,这是平面的一个拓扑性质。显然,地图着色问题与度量(区域面积、边界线长度等)和形状无关,关键是区域的个数和它们之间的邻接关系。地图经过变形(缩放或各种投影)后着色所需颜色数不变。显然,拓扑性质是几何对象的一类特别的几何性质,涉及对象在整体结构上的性质,但反之不然。拓扑性质与所处理对象(通常称为拓扑对象或拓扑空间)的大小、形状以及所含线段的曲直等都无关,也就不能用普通的几何方法来处理。

专门研究几何对象在弹性变换下保持不变的性质(拓扑性质)的数学分支就是拓扑学。拓扑学的中心任务就是对拓扑对象进行拓扑等价分类。拓扑等价的对象有相同的拓扑性质。若一个拓扑对象有拓扑性质 P ,而另一个没有拓扑性质 P ,则我们立刻可以断定这两个拓扑对象不是拓扑等价的。例如,前面看到了球面和环面有不同的拓扑性质,由此即知球面和环面不是拓扑等价的。

2. 拓扑学概览

拓扑学的起源可以追溯到古希腊时期。当时,人们开始思考什么是空间,如何描述它以及如何计算它。这个时期的数学家主要致力于研究欧氏空间的性质和欧氏空间里的几何形体。其中最有名的数学家是欧几里得,他提出了欧氏几何公理,并在其基础上建立了一套完整的几何学体系。这套体系包括点、线、平面等基本概念,以及它们之间的关系。人们公认,拓扑学始创于伟大数学家欧拉(1707—1783)解决著名的哥尼斯堡七桥问题。在18世纪,一条流经普鲁士哥尼斯堡(今俄罗斯加里宁格勒)城的河流把城市分为4个分离的区域,有7座桥梁跨越这条河流,并把这4个区域相连在一起,如图1(a)所示。哥尼斯堡城的居民考虑了这样一个问题:是否存在一个旅游路线,使游人在哥尼斯堡城七座桥的每一座只走过一次就能遍游全城?有趣的是,当时人们尝试了多次,没有一个人能找到这样的旅游路线。

上述问题引起了欧拉的注意。他意识到,这是一个新的属于“位置几何”的数学课题,在尝试解决它时,不要求确定长度和计算角度,它的解决仅仅需要考虑位置关系。欧拉对这个问题进行了分析,把它归结为一个图形能否一笔画出的问题,

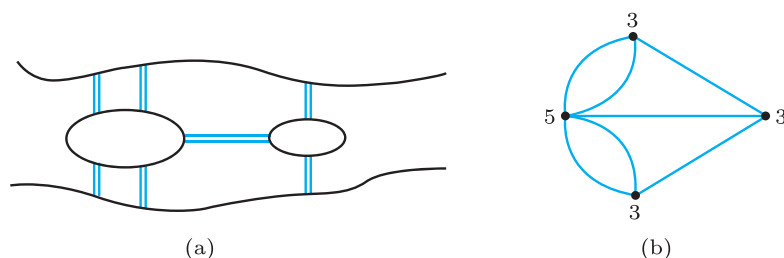


图 1 哥尼斯堡七桥问题

并在 1736 年证明了定理: 有一条道路走过图中每条边恰好一次, 当且仅当该图最多有两个“奇”点, 这里的奇点是指所连边数是奇数的图形顶点。哥尼斯堡七桥问题本质上是问图 1(b) 的图形能否一笔画出 (点表示区域, 线表示桥梁)。由欧拉定理可知, 通过漫步一次走过哥尼斯堡七桥实现遍游全城的路线是不存在的。欧拉的上述定理被认为是拓扑学的第一个定理。欧拉还在 1752 年给出了一个凸多面体的顶点数 V 、边数 E 和面数 F 所满足的关系式 $V - E + F = 2$, 该等式也称为欧拉公式。欧拉的这些工作为后来拓扑学的发展奠定了重要的基础。

在此后长达一个半世纪的时间里, 有许多著名的数学家追随这最初始于欧拉的研究, 对位置几何学做出了有价值的贡献。柯西是给出连续这个概念精确定义的第一人, 而连续是拓扑学最基本的概念之一。进一步, 柯西在 1825 年还给出了一个拓扑不变量: 闭路 C 绕一点的卷绕数, 可通过一个全纯微分形式沿 C 的积分来计算。高斯在 1833 年在研究磁力线时给出了空间中互不相交的两个有向闭曲线间的环绕数这个精巧的拓扑不变量。黎曼在 1851 年的博士论文和 1857 年关于阿贝尔函数的文章中, 提出了现在我们称之为黎曼曲面的概念。默比乌斯在 1863 年证明了空间中的闭曲面可以通过往曲面上加 p 个环柄而得, 其中的 p 是黎曼给出的不变量, 即曲面的亏格。默比乌斯还首次 (1858 年) 注意到了现在被称为默比乌斯带的不可定向曲面的存在。

拓扑学 (topology) 起初也叫形势分析学, 这是莱布尼茨于 1679 年提出的名词, 其中的“形”是指一个图形本身的性质, “势”是指一个图形与其子图形相对的性质。这个术语首先出现于 1847 年利斯廷的论文《拓扑学的初步研究》中, 源自希腊文 $\tau\omicron\pi\omicron\varsigma$ (位置、形势)。在汉语里, “拓”有以手推物、开辟、扩充的意思, “扑”有拍打的意思。将 topology 翻译成拓扑学, 既在意思上相符, 又照顾到了发音, 是一个很成功的翻译。

到 19 世纪、20 世纪之交, 已经形成了组合拓扑学与点集拓扑学这两个研究方向。

组合拓扑学的奠基人是庞加莱。在 1895 年至 1904 年间, 庞加莱创立了用剖分研究流形的基本方法, 引进了许多拓扑不变量: 基本群、同调、贝蒂数、挠系数等, 还提出了具体计算的方法。拓扑学的另一个渊源来自分析学的严密化。实数的

严格定义推动了康托尔从 1873 年起系统地展开了对欧氏空间中的点集的研究, 提出拓扑中的许多基本概念, 如聚点 (极限点)、开集、闭集、稠密性、连通性等。分析学中进一步发展出泛函的概念, 最终促使抽象拓扑空间概念的产生, 点集拓扑学应运而生。1914 年豪斯多夫在其著作《点集论纲要》中介绍了拓扑空间的公理化基础, 从而开创了拓扑学作为基础数学的一个分支的全面研究。点集拓扑学经过 20 世纪 30 年代中期起布尔巴基学派的补充整理和完善, 发展成一般拓扑学, 并逐渐趋于成熟。到 1945 年前后, 点集拓扑已经成为数学研究的共同基础。

在庞加莱创立组合拓扑之后, 布劳威尔在 1910 年至 1912 年间提出了用单纯映射逼近连续映射的方法, 用以证明不同维数的欧氏空间不同胚; 引进了同维流形之间的映射度的概念, 用以研究同伦分类, 并开创了不动点理论。他使组合拓扑学在概念精确、论证严密方面达到了应有的标准。随后, 亚历山大在 1915 年证明了贝蒂数与挠系数的拓扑不变性。随着抽象代数学的兴起, 1925 年左右, 诺特提议把组合拓扑学建立在群论的基础上。在诺特的影响下, 1928 年霍普夫定义了同调群。从此, 组合拓扑学逐步演变成利用抽象代数方法研究拓扑问题的代数拓扑学。1945 年, 艾伦伯格与斯廷罗德以公理化的方式总结了当时的同调论, 后来写成《代数拓扑学基础》(1952 年), 对于代数拓扑学的传播、应用和进一步发展起了巨大的推动作用。他们把代数拓扑学的精髓概括为: 把拓扑问题转化为代数问题, 通过计算来求解。

同调群以及在 20 世纪 30 年代引进的上同调环, 都是从拓扑到代数的过渡。直到今天, 同调论 (包括上同调) 所提供的不变量仍是代数拓扑学中最易于计算的, 因而也最常用。同伦群提供了从拓扑到代数的另一种过渡, 其几何意义比同调群更明显, 但是极难计算。1950 年, 塞尔利用谱序列这个代数工具, 在同伦群的计算上取得突破 (菲尔兹奖工作), 为其后拓扑学的突飞猛进开辟了道路, 拓扑学开始进入黄金时代。

微分拓扑学是研究微分流形与微分映射的拓扑学。随着代数拓扑和微分几何的发展, 微分拓扑学在 20 世纪 30 年代重新兴起。惠特尼在 1935 年给出了微分流形的一般定义, 并证明它总能作为光滑的子流形嵌入高维欧氏空间。1953 年, 托姆的协边理论 (菲尔兹奖工作) 开创了微分拓扑学与代数拓扑学并肩跃进的局面, 许多困难的微分拓扑问题被转化成代数拓扑问题而得到解决, 同时也刺激了代数拓扑学的进一步发展。1956 年米尔诺发现 7 维球面上有不同寻常的微分结构 (菲尔兹奖工作)。随后, 不能赋予任何微分结构的流形也被人们构造出来。这些都显示拓扑流形、微分流形和分片线性流形这三个范畴有巨大的差别, 微分拓扑学也从此被公认成为一个独立的拓扑学分支。1960 年, 斯梅尔证明了 5 维以上微分流形的庞加莱猜想 (菲尔兹奖工作)。米尔诺等人发展了处理微分流形的基本方法——剗补术, 使 5 维以上流形的分类问题亦逐步趋向代数化。

近几十年来,用几何的思想和方法来研究流形的结构和性质取得很多重大突破,其中包括流形的三大范畴(拓扑、光滑、分片线性)之间的关系、20世纪80年代初弗里德曼关于4维拓扑庞加莱猜想的证明、 $\mathbb{R}^4$ 上不同寻常的微分结构的发现和21世纪初佩雷尔曼关于瑟斯顿几何化猜想的证明(3维庞加莱猜想是其特例)。通常把这些研究归于几何拓扑学的范畴,以强调其几何色彩,用以区别代数味道很重的代数拓扑学。

3. 拓扑学的重要性

拓扑学的基本理论及其思想已经成为当代数学与科技工作者的必要基础。拓扑学的重要性体现在它与其他数学分支、其他学科的相互作用上。

拓扑学与微分几何学有着天然血缘关系,它们从不同的角度研究流形的性质。为了研究黎曼流形上的测地线,莫尔斯在20世纪20年代建立了非退化临界点理论,把流形上光滑函数的临界点的指数与流形本身的贝蒂数联系起来,并发展成大范围变分法。莫尔斯理论后来又在拓扑学中用于证明典型群的同伦群的博特周期性(这是K理论的基石),并启示了处理微分流形的剜补术。

微分流形、纤维丛、示性类给嘉当的整体微分几何学提供了合适的理论框架,也从中获取了强大的动力和丰富的课题。陈省身在20世纪40年代引进了“陈示性类”,不但对微分几何学影响深远,对拓扑学也十分重要。纤维丛理论和联络理论一起为理论物理学中杨-米尔斯规范场论提供了现成的数学框架,犹如20世纪初黎曼几何学对于爱因斯坦广义相对论的作用。规范场的研究又促进了4维微分拓扑学出人意料的进展。

拓扑学对于分析学的现代发展起了极大的推动作用。随着科学技术的发展,需要研究各种各样的非线性现象,分析学更多地求助于拓扑学。20世纪30年代勒雷和绍德尔把布劳威尔的不动点定理和映射度理论推广到巴拿赫空间,形成了拓扑度理论。后者以及前述的临界点理论,都已成为研究非线性偏微分方程的标准工具。微分拓扑学的进步,促进了分析学向流形上的分析学(又称大范围分析学)发展。在托姆的影响下,微分映射的结构稳定性理论和奇点理论已发展成为重要的分支学科。

斯梅尔在20世纪60年代初开创的微分动力系统的理论就是流形上的常微分方程理论。同期,阿蒂亚等人创立了微分流形上的椭圆型算子理论。著名的阿蒂亚-辛格指标定理把算子的解析指标与流形的示性类联系起来,是分析学与拓扑学结合的范例。现代泛函分析的算子代数已与K理论、指标理论、叶状结构密切相关。来自代数拓扑的层论已经成为多复变函数论的基本工具。

拓扑学的需要大大刺激了抽象代数学的发展,并且形成了两个新的代数学分

支: 同调代数与代数 K 理论。代数几何学从 20 世纪 50 年代以来已经完全改观。托姆的协边理论直接促成代数簇的黎曼-罗赫定理的产生, 后者又促使拓扑 K 理论的产生。现代代数几何学已完全使用上同调的语言, 代数数论与代数群也在此基础上取得许多重大成果, 包括有关不定方程整数解数目估计的韦伊猜想和莫德尔猜想的证明。

范畴与函子的概念是在概括代数拓扑的方法论时形成的。范畴论已深入数学基础、代数几何学等分支, 对拓扑学本身也有重要影响。近几十年来, 越来越多数学家和科学家把拓扑学的概念用于模拟或理解现实世界的结构和现象。拓扑学在许多自然科学和社会科学领域也有了广泛的应用, 并成了应用数学和数学的应用的一个重要组成部分。

在经济学方面, 冯·诺伊曼首先把不动点定理用于证明均衡的存在性。在现代数理经济学中, 对于经济的数学模型, 均衡的存在性、性质、计算等根本问题都离不开代数拓扑学、微分拓扑学和大范围分析的工具。拓扑学在信息理论、系统理论、对策论、规划论、网络论中也都有重要应用。在计算机科学领域中, 拓扑学被广泛应用于建模、网络分析、数据可视化等方面。

拓扑建模是一种三维数据建模方法, 它利用拓扑学的理论和应用技术来构建复杂的形状和结构。利用拓扑建模技术, 可以在相对短的时间内生成复杂的模型, 快速进行拓扑变换和形状优化等操作。这在工程、医学、地质勘探等行业中都有着广泛的应用。

拓扑学在网络分析中也有着广泛的应用。一个网络通常可以抽象为一个拓扑结构, 而拓扑结构的分析可以帮助我们更好地理解 and 优化网络的性能。例如, 拓扑结构分析可以用来发现网络中的关键节点和瓶颈、提高网络的灵活性和鲁棒性等。

拓扑学在数据可视化中也有着非常重要的应用。数据可视化是指将大量的数据转化为可视化的图形展示形式, 使人们可以更直观、更清晰地理解数据之间的关系和趋势。近二十年来发展起来的拓扑数据分析可以帮助我们将高维数据转化为低维的可视化对象, 从而可以更好地展示数据之间的联系与形状特征。

4. 本书的使用说明

本书主要介绍拓扑学这门课程的基础理论与核心内容和拓扑学的一些常见的基本应用。前四章介绍点集拓扑学的基本内容, 包括拓扑空间与连续映射 (第 1 章)、构造新空间 (第 2 章)、分离性与可数性 (第 3 章)、连通性与紧致性 (第 4 章)。第 5—9 章介绍代数拓扑学的基本理论, 包括同伦等价与基本群 (第 5 章)、紧致曲面的拓扑分类 (第 6 章)、覆盖空间的基本理论 (第 7 章)、单纯复形与单纯同调理论 (第 8, 9 章)。作为特色之一, 本书在前 9 章就注重各章基本理论的应

用介绍,在第 10 章搜集整理了拓扑学的基本理论(前 9 章内容)在数字图像处理、遗传工程、地理信息系统、机器人学、医学(心脏搏动模型)、生物化学、化学、化学图论、经济学、电子线路设计等领域的一些常见和基本的应用案例,供想了解拓扑学应用的读者选读。

拓扑学理论的一个特点是内容抽象、概念多,关系盘根错节错综复杂。初学者常常会感到不知所云,如在雾中,不知在干什么,既看不清来时的路,也不知道下一步该如何走。如何学好拓扑学?编者认为,理解抽象的学科需要透彻理解具体的例子,学懂主要定理的证明过程,还需要静下心来认真做题。拓扑学中各种奇怪的例子特别多,初学者可以先掌握其中最常见的例子,例如:度量诱导的拓扑、子空间的拓扑、离散拓扑、平庸拓扑、乘积拓扑、商拓扑。这几种拓扑一定要透彻理解,每遇到新的概念、定理,就可以联系这几种拓扑空间的例子把概念、定理具体化,加强直观理解。

读者若带着问题去学习和思考,通常会起到事半功倍的效果。建议读者在学习拓扑学的基本概念、定理和做练习时,头脑中经常问一下下面这些问题,并尝试回答:能给出定义的等价说法吗?能给出与书中不同的例子吗?这个定理直观吗?它看起来和我知道的另一个定理相似吗?定理证明的关键在哪里?能用不同的方法证明它吗?定理中的条件是必要的吗?如果去掉或换掉定理或练习中的一些条件,它是否还正确?久而久之坚持下来,读者就会慢慢拨开重重迷雾,豁然开朗,清楚知道自己在做什么和向何处去,如同移去盖楼时外面的脚手架,就会知道楼盖到哪里了,最后的目标是什么。

本书在设置习题上也有一些考虑。在广泛参考国内外的拓扑学教材的基础上,结合编者学习、研究拓扑学的心得以及经验,编者从学生学习拓扑学的实际训练需求出发,搜集、整理了大量的习题,还给出了一些原创的习题。这些习题比较全面地覆盖了书中涉及的基础概念和基本技巧训练,少数习题涉及书中内容的延伸和拓扑学近年来的一些发展。

编者对所有习题进行了分类标注。标注分类主要从以下几个角度考量。一方面,习题按难度大致可以分为初等难度、中等难度(需要一定的技巧)和具有一定挑战难度的习题(包括少数开放题目,需要读者自己给出结论),分别用 E (Easy)、M (Middle) 和 D (Difficult) 标注。学生在掌握教材中的概念、方法和主要结论的情况下可以完成初等难度的习题。完成中等难度的习题需要学生掌握较高的技巧,而完成挑战难度的习题则需要学生具有很高的数学水平和数学成熟度。此外,对于有挑战难度的习题中难度较大或难度大的习题,分别用“*”和“**”标注。另一方面,即使对于同一难度的习题,有的题目相对于其他题目更有价值,更值得做。编者将这部分习题用 R (Recommend) 标注,供教师在给学生布置作业时优先选用。还有一部分习题是为想真正学好、学会拓扑学,或者有志于进一步研究拓扑学的学

生准备的,用 H (Highly Recommend) 标注。它们是教材正文的重要补充,非常经典,很多结论是几何拓扑领域的专家学者熟知和常用的。完成这些习题对于深入理解和掌握教材中相关内容和延伸内容中的重要技巧和方法都非常有帮助。

编者是初次尝试采用这种题目标注方法,欢迎读者提供反馈意见。

本书配备了大量的图形,用以帮助读者在学习拓扑学理论时直观地理解相关的概念或证明。

附录汇集了学习本书所需要的集合论和代数学的一些预备知识,供读者需要时查询。

本书是为数学类专业基础较好的本科生(拔尖班、强基班、基地班等学生)编写的拓扑学入门教材,也适用于数学类专业的普通本科生与研究生在学习拓扑学课程时酌情选择使用。对于对拓扑学及其应用感兴趣的其他专业的教师、研究生和科技工作者,本书也可作为了解拓扑学基础理论与应用的参考手册。

针对不同学校对拓扑学课程的不同学时要求,建议选择的学习内容如下:

学时(学分)	学习内容
32(2)	第 1—4 章(24 学时),第 5.1 节、第 5.2 节(8 学时)
48(3)	第 1—4 章(24 学时),第 5 章(16 学时),第 6 章(8 学时)
64(4)	第 1—4 章(24 学时),第 5 章(16 学时),第 6 章(8 学时),第 7 章(8 学时),第 8 章(8 学时)
80(5)	第 1—4 章(24 学时),第 5 章(16 学时),第 6 章(8 学时),第 7 章(8 学时),第 8 章(8 学时),第 9 章(16 学时)

限于编者水平和编著时间紧迫,本书恐怕仍有疏漏和不足之处,编者完全承担责任。欢迎并感谢读者和有关专家对本书提出宝贵的评论和建议(可通过电子邮件发送给编者),以便有机会再版时修订、补充和完善。

雷逢春,杨志青,李风玲
2024 年 7 月 20 日于大连

编者电子邮箱:
fclei@dlut.edu.cn
yangzhq@dlut.edu.cn
fenglingli@dlut.edu.cn