

前言

偏微分方程是连接纯粹数学与自然科学及工程技术的重要桥梁,是数学在各行各业发挥关键作用的重要工具之一。数学物理方程(简称为数理方程)主要是指根据物理学及其他各门自然科学中第一性原理而建立的偏微分方程模型。对数理方程乃至一般的偏微分方程的研究推动了这些学科及领域的发展,甚至成为某些学科及领域研究的核心内容。随着现代科技的发展,偏微分方程在物理、力学以外的学科(如生物、材料、经济、管理等),以及在众多工程技术领域(如航空、航天、金融、电力、水利等)也发挥着越来越重要的作用。

数理方程课程是数学专业本科生的专业必修课,主要介绍偏微分方程的经典理论,是基础数学、应用数学和计算数学等方向的核心课程。

从 1960 年代起,谷超豪先生开始在复旦大学数学系为本科生开设数理方程课程,谷超豪、李大潜、陈恕行、郑宋穆、谭永基编写完成《数学物理方程》讲义和教材,其显著特点是高度重视方程及其求解方法的物理背景,在全国高校数学及相关专业推广使用后,取得了广泛而深远的影响。

随着现代偏微分方程理论的发展,特别是在人工智能、芯片设计制造等新兴领域的广泛应用,数理方程课程内容和教材的定位及内容发生了变化,亟待革新。为响应国家建设一流课程、培养一流人才的号召,复旦大学数理方程教学团队自 2019 年起启动课程改革与建设,2021 年起每年开设荣誉课程,形成了追求卓越、与时俱进、以学生发展为中心的教学理念,计划把数理方程建设成为一门面向一流数学专业拔尖本科生、具有鲜明复旦特色的核心专业课,并把编写一本高水平教材作为核心目标之一。

本书定位是作为高水平本科院校的数学专业的高年级本科生、研究生数学物理方程(或偏微分方程)课程的教材或教学参考书。本书共分五章:引言,调和方程,热方程,波方程,偏微分方程的应用。第一章介绍数理方程及偏微分方程的一些基本概念、基本来源、研究对象以及二阶偏微分方程的基本分类;第二至四章依次介绍三类典型的数理方程(调和方程、热方程、波方程)的物理来源,定解问题的提法与适定性理论,以及相应的(经典)解的性质;第五章介绍偏微分方程的一

些现代应用。最后,在附录中提供了习题答案与提示。其中,我们将重点介绍研究偏微分方程的一些重要的思想和方法,如极值原理、Green 函数法、分离变量法、Fourier 变换法、能量积分法等。内容涵盖了教育部本科教育教学改革试点工作计划(“101 计划”)《高等学校数学类专业人才培养战略研究报告暨核心课程体系》中所列的“偏微分方程”课程知识要点。

一方面,本书继续保持和发扬复旦大学谷超豪先生等编写的经典教材中的优秀传统:以三类二阶方程的定解问题的适定性理论为教材的核心内容;继续强调物理背景,注重空间为一、二、三维的情形,用理论解释现象。

另一方面,本书对教材内容进行了精心设计,结合学科发展前沿,作了拓广和深化,总体上有以下显著的特点:

(1) 调整内容次序,先讲椭圆型方程,它的特征理论就可作为分离变量法求解热方程、波方程初边值问题的依据。

(2) 注重从物理背景出发,从方程特殊解的例子出发,引出解的一般性质及求解方法的讨论。

(3) 加强挑战性,拓广和深化数学分析内容,加入了椭圆型方程和热方程的梯度估计;接轨科研前沿,贴近一线研究成果和发展方向,引入热方程的古代解与 Liouville 性质;加强延伸性,与研究生课程“现代偏微分方程”接轨,引入广义解、广义函数及其 Fourier 变换,以及解算子概念;与其他数学方向(控制论、微分几何等)密切联系,介绍热方程解的倒向唯一性以及带耗散边界条件的波方程的指数稳定性等。

(4) 分层次精选了部分习题,较为基础的习题作为教材内容的补充,挑战性强的习题作为深化和拓展。

我们希望读者通过使用本书,能从物理模型和数学理论两个方面,把握这三类数学物理方程定解问题提法及其适定性理论的异同点,能掌握研究偏微分方程适定性的一些重要方法,为进一步学习偏微分方程现代方法、微分方程数值解、反问题、控制理论与几何分析等内容打下坚实基础。

从 2019 年起,编者轮番面向复旦大学数学科学学院大学三年级本科生开设数理方程及其荣誉课程,并陆续使用新编讲义。完成本教材前四章的教学大约需要 64 学时。教师可以根据所在学校学生的实际情况,选择教材内容进行教学或者供学生自主学习。

在教材撰写和修订过程中,编者得到了复旦大学李大潜先生、洪家兴先生、陈恕行先生的关心和鼓励,以及偏微分方程教学团队老师们的宝贵建议。教育部数学“101 计划”工作组,特别是微分方程组的专家们给予了热情鼓励和大力支持。在此,编者对各位前辈、同行的关心和帮助表示衷心的感谢。

此外,编者要特别感谢多位课程助教,他们帮助整理和修订了讲义,指出了原

稿中的许多错误, 并提供了习题答案与提示。感谢复旦大学数学科学学院自 2016 级以来的多届本科生, 他们对课程讲义和教学实施提出了许多宝贵的意见。

最后, 编者要感谢高等教育出版社给予的关心和支持, 特别是编辑们的帮助, 使得本书得以顺利出版。

限于编者的水平, 不妥及错漏之处在所难免, 恳请广大读者批评指正。

编 者

2024 年 7 月

