

第一章

复 数

我们将介绍复数的基本运算及其几何表示.

1.1 算术运算

记 $\mathbb{R}$ 为实数域. 定义

$$\mathbb{C} = \{a = \alpha + i\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

其中元素 $a = \alpha + i\beta$ 称为复数, α 称为 a 的实部, 记为 $\operatorname{Re} a$, 而 β 称为 a 的虚部, 记为 $\operatorname{Im} a$. 当 $\alpha = 0$ 时, $a = i\beta$ 称为纯虚数. 当 $\beta = 0$ 时, $a = \alpha$ 当然就是实数. $a = 0$ 是唯一的既是实数又是纯虚数的复数. 在 $\mathbb{C}$ 上定义加法和乘法运算

$$\begin{aligned}(\alpha + i\beta) + (\gamma + i\delta) &= (\alpha + \gamma) + i(\beta + \delta), \\(\alpha + i\beta)(\gamma + i\delta) &= (\alpha\gamma - \beta\delta) + i(\alpha\delta + \beta\gamma).\end{aligned}$$

由乘法定义得到 $i^2 = -1$. 下面我们证明 $\mathbb{C}$ 是一个域.

显然复数空间 $\mathbb{C}$ 关于加法和乘法运算是封闭的, 加法和乘法都是可交换运算, 且每一个元素都有加法逆元. 我们只需验证每一个非零元素在 $\mathbb{C}$ 中都有乘法逆元.

任给 $\alpha + i\beta \neq 0$, 我们要找 $x + iy \in \mathbb{C}$, 使得 $(\alpha + i\beta)(x + iy) = 1$. 整理这个式子得到

$$\begin{cases} \alpha x - \beta y = 1, \\ \beta x + \alpha y = 0. \end{cases}$$

其解为

$$x = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad y = \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

因此每个非零元在 $\mathbb{C}$ 中都有乘法逆元.

1.2 平方根

我们知道在实数域上负数没有平方根. 定义复数域的动力之一就是使得每个数都有平方根.

任给 $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, 我们求它的平方根, 即解方程 $(x + iy)^2 = \alpha + i\beta$. 计算得到

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha, \\ 2xy = \beta. \end{cases}$$

于是

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

因此

$$x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

其中平方根取正数或者零. 联立上面方程组的第一个方程得到

$$\begin{cases} x^2 = (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha)/2, \\ y^2 = (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha)/2. \end{cases}$$

因此当 $\alpha = 0$ 时, 方程有唯一解 $x + iy = 0$. 当 $\alpha \neq 0, \alpha \geq 0$ 时, x 有且仅有两个符号相反的解; 当 $\alpha < 0$ 时, y 有且仅有两个符号相反的解, $x = \beta/(2y)$. 这样我们得到, 除零以外, 每个复数都有且仅有两个平方根.

1.3 合理性

复数域包含实数域, 且使得代数方程 $x^2 + 1 = 0$ 有解. 事实上复数域是满足如上性质的最小的域, 即任意满足如上性质的一个域都包含一个子域与复数域同构. 这让复数域的定义有其合理性. 下面我们来证明复数域的上述性质.

假设 F 是包含实数域 $\mathbb{R}$ 且使得 $x^2 + 1 = 0$ 有解的一个域. 记 $i' \in F$ 是方程 $x^2 + 1 = 0$ 的一个解, 即 $(i')^2 = -1$. 令

$$\mathbb{C}' = \{\alpha + i'\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

则 $\mathbb{C}'$ 是 F 的一个子域. 对应 $\alpha + i\beta \mapsto \alpha + i'\beta$ 是 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}'$ 的一个域同构.

复数域与多项式 $x^2 + 1$ 的上述关系也可以通过剩余类刻画. 考虑实系数多项式环 $\mathbb{R}[x]$. 如果 $P(x) - Q(x)$ 可以整除不可约多项式 $x^2 + 1$, 那么定义等价关系 $P(x) \equiv Q(x)$. 任给 $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, 存在唯一的 (α, β) , 使得 $P(x) \equiv \alpha + \beta x$. 令 $Q(x) \equiv \delta + \gamma x$, 则

$$P(x)Q(x) \equiv (\alpha + \beta x)(\delta + \gamma x) \equiv (\alpha\delta - \beta\gamma) + (\alpha\gamma + \beta\delta)x.$$

将 $P(x)$ 对应于复数 $\alpha + i\beta$, 上述公式表明这个对应实现了从 $\mathbb{R}[x]$ 模 $x^2 + 1$ 的剩余类域到 $\mathbb{C}$ 的一个同构.

1.4 共轭和绝对值

在复数域 $\mathbb{C}$ 的定义中我们只用到了等式 $i^2 = -1$. 由于 $-i$ 也具有相同性质, 因此把 i 换成 $-i$ 同样可以得到复数域. 这样我们就得到了 $\mathbb{C}$ 上的一个自同构

$$\alpha + i\beta \mapsto \alpha - i\beta.$$

这个同构限制在 $\mathbb{R}$ 上不变. 这也是 $\mathbb{C}$ 上唯一的限制在 $\mathbb{R}$ 上不变的非平凡域自同构.

复数 $\alpha - i\beta$ 称为复数 $a = \alpha + i\beta$ 的**共轭**, 记为 $\bar{a}$. 由定义

$$\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}, \quad \overline{ab} = \bar{a}\bar{b},$$

即共轭与加法和乘法都可交换. 复数的实部和虚部也可以通过共轭来表示:

$$\operatorname{Re} a = \frac{a + \bar{a}}{2}, \quad \operatorname{Im} a = \frac{a - \bar{a}}{2i}.$$

复数 a 与其共轭相乘为

$$a\bar{a} = (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \alpha^2 + \beta^2 \geq 0.$$

我们称 $|a| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ 为复数 a 的**模**或**绝对值**. 由定义

$$|a| = |\bar{a}|, \quad |ab| = |a||b|.$$

根据加法的定义, 计算得到

$$|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(a\bar{b}), \quad (1.1)$$

$$|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2\operatorname{Re}(a\bar{b}). \quad (1.2)$$

两个式子相加, 得到恒等式

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2).$$

例 1.1 证明 **Lagrange (拉格朗日) 恒等式**

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \sum_{i=1}^n |b_i|^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i \bar{b}_j - a_j \bar{b}_i|^2.$$

证明 当 $n=1$ 时恒等式显然成立. 假设恒等式对 $n-1$ 成立, 则

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i \right|^2 + \sum_{1 \leq i < j < n} |a_i \bar{b}_j - a_j \bar{b}_i|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} |a_i|^2 \sum_{i=1}^{n-1} |b_i|^2. \quad (1.3)$$

由公式 (1.2) 得到

$$\begin{aligned}
 & \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i \bar{b}_j - a_j \bar{b}_i|^2 - \sum_{1 \leq i < j < n} |a_i \bar{b}_j - a_j \bar{b}_i|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} |a_i \bar{b}_n - a_n \bar{b}_i|^2 \\
 &= |a_n|^2 \sum_{i=1}^{n-1} |b_i|^2 + |b_n|^2 \sum_{i=1}^{n-1} |a_i|^2 - 2\operatorname{Re} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \bar{b}_n \bar{a}_n b_i \right).
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

由公式 (1.1) 得到

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right|^2 - \left| \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i \right|^2 = |a_n b_n|^2 + 2\operatorname{Re} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \bar{b}_n \bar{a}_n b_i \right). \tag{1.5}$$

将等式 (1.4) 与等式 (1.5) 相加, 并将 (1.3) 代入, 得到

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i \bar{b}_j - a_j \bar{b}_i|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} |a_i|^2 \sum_{i=1}^{n-1} |b_i|^2 + |a_n|^2 \sum_{i=1}^{n-1} |b_i|^2 + |b_n|^2 \sum_{i=1}^{n-1} |a_i|^2 + |a_n|^2 |b_n|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \sum_{i=1}^n |b_i|^2.
 \end{aligned}$$

这样我们就证明了 Lagrange 恒等式. $\square$

1.5 不等式

我们介绍一些常用的不等式关系. 首先根据绝对值的定义可以得到

$$-|a| \leq \operatorname{Re} a \leq |a|, \quad -|a| \leq \operatorname{Im} a \leq |a|.$$

结合 (1.1) 得到

$$|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(a\bar{b}) \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| = (|a| + |b|)^2.$$

由此得到三角不等式

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

运用数学归纳法可以将这个不等式推广到任意项求和:

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

从 Lagrange 恒等式可以直接推出 **Cauchy (柯西) 不等式**

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \sum_{i=1}^n |b_i|^2.$$

这里我们给出另一个证明: 先引入一个参数, 证明一个对任意参数都成立的不等式. 然后赋予参数一个恰当的值即得到需要的不等式.

证明 不妨假设 $\sum_{i=1}^n |b_i|^2 = 1$, 否则在等式两边都除以这个和式即可. 这时 Cauchy 不等式就等价于一个更简单的形式

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n |a_i|^2.$$

考虑 $|a_i - \lambda \bar{b}_i|^2$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 为参数. 其和为

$$\sum_{i=1}^n |a_i - \lambda \bar{b}_i|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 + |\lambda|^2 - 2\operatorname{Re} \left(\bar{\lambda} \sum_{i=1}^n a_i b_i \right).$$

取 $\lambda = \sum_{i=1}^n a_i b_i$, 得到

$$0 \leq \sum_{i=1}^n |a_i - \lambda \bar{b}_i|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 - \left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right|^2.$$

这样我们就证明了 Cauchy 不等式. 左边的不等式说明 Cauchy 不等式中的等号成立, 当且仅当存在复数 λ , 使得 $a_i = \lambda \bar{b}_i (i = 1, 2, \dots, n)$. □

1.6 复数的几何表示

对于平面上一个给定的直角坐标系, 复数 $a = \alpha + i\beta$ 可以用坐标为 (α, β) 的点来表示. 其中 x 轴称为**实轴**, y 轴称为**虚轴**. 平面本身称为**复平面**.

几何表示的有用之处在于它用几何语言把复数表达成生动的图形. 不过我们接受这样的观点: 分析中的所有结论都应从实数性质而不是从几何公理推导出来. 因此我们只用几何进行描述, 而不用来进行有效的证明.

复数不仅可以表示为复平面中的点,也可以表示为从原点指向这个点的向量. 这个复数、点以及这个向量都可以用同一个字母 a 表示. 像通常一样,一个向量平行移动后得到的向量和原向量相等.

考虑两个非零复数 a 和 b . 它们可以表示为从原点出发指向 a 和 b 的向量. 则由 a 的终点指向 b 的终点的向量就表示 $b - a$. 为了表示它们的和,将向量 b 平移,使其起点与向量 a 的终点重合. 则由原点指向 b 的平移后的向量的终点表示 $a + b$ (图 1.1).

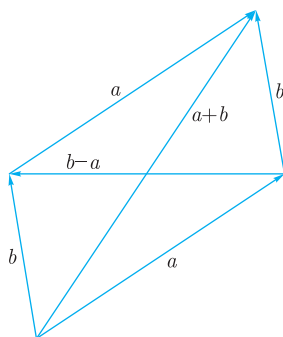


图 1.1 复数加法

通过几何表示,三角不等式 $|a + b| \leq |a| + |b|$ 及恒等式 $|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$ 就成为熟悉的几何定理了.

复数乘法在极坐标表示下更简单. 设点 $a = \alpha + i\beta \neq 0$ 的极坐标为 (r, θ) ($r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$), 则

$$\alpha = r \cos \theta, \quad \beta = r \sin \theta.$$

因此 $a = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, 其中 $r = |a|$ 为复数 a 的模. 角度 θ 称为复数 a 的辐角, 记为 $\arg a$.

设 $a_k = r_k(\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$ ($k = 1, 2$) 为两个非零复数. 由正弦和余弦的加法公式,

$$a_1 a_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

因此复数乘法就是把模相乘, 辐角相加. 从几何上看, 以 $0, 1, a_1$ 为顶点的三角形和以 $0, a_2, a_1 a_2$ 为顶点的三角形相似 (图 1.2).

复数加法和乘法也可以通过 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换或者矩阵表示. 由伸缩和旋转的复合所生成的线性变换所对应的矩阵可以表示为

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \end{pmatrix},$$

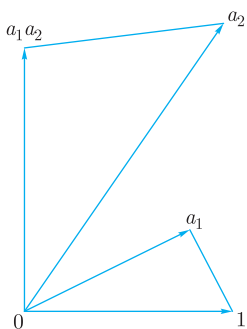


图 1.2 复数乘法

其中等式右边的第一个矩阵表示伸缩, 第二个矩阵表示旋转. 由矩阵的加法和乘法定义,

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & -\delta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma & -\beta - \delta \\ \beta + \delta & \alpha + \gamma \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\delta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma - \beta\delta & -\alpha\delta - \beta\gamma \\ \alpha\delta + \beta\gamma & \alpha\gamma - \beta\delta \end{pmatrix}.$$

将这两个矩阵对应于复数 $\alpha + i\beta$ 与 $\gamma + i\delta$. 上述等式说明矩阵加法和乘法分别对应于复数加法和乘法. 因此对应实现了如上矩阵到复数域的一个同构.

1.7 高次单位根

对整数 $n \geq 2$, 非零复数 $a = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 的 n 次幂为

$$a^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

当 $r = 1$ 时即为 **de Moivre (棣莫弗) 公式**

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

这个公式可以将 $\cos n\theta$ 和 $\sin n\theta$ 表示为 $\cos \theta$ 与 $\sin \theta$ 的和以及乘积的形式.

当 $n \geq 2$ 时, 我们可以利用 de Moivre 公式得到复数的 n 次根. 零的 n 次根只能是零. 非零复数 $a = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 的所有 n 次根可以表示为

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

方程 $z^n = 1$ 的根称为 n 次单位根. 令

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n},$$

所有 n 次单位根可以表示为 $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$.

1.8 解析几何

我们将用复变量来表示一些基本的平面图形.

平面上直线方程的实数形式为 $\alpha x + \beta y = \gamma$, 其中 α, β 不全为零. 将 $x = (z + \bar{z})/2$ 与 $y = (z - \bar{z})/(2i)$ 代入, 得到

$$(\alpha - i\beta)z + (\alpha + i\beta)\bar{z} = 2\gamma.$$

令 $a = \alpha - i\beta$. 我们就得到直线方程的表达式 $az + \bar{a}\bar{z} = 2\gamma$ 或者

$$\operatorname{Re}(az) = \gamma \quad (a \neq 0, \gamma \in \mathbb{R}).$$

反过来, 考虑复数形式的一次方程 $z + b\bar{z} + c = 0$ ($b, c \neq 0$). 令 $b = \alpha + i\beta$, $c = \delta + i\gamma$. 我们就得到了方程的实数形式

$$\begin{cases} (1 + \alpha)x + \beta y = -\delta, \\ \beta x + (1 - \alpha)y = -\gamma. \end{cases}$$

当 $1 - |b|^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2 \neq 0$ 时, 方程有唯一解. 这时方程表示复平面中的一个点.

当 $|b| = 1$ 时, 令 a 为 $1/b$ 的一个平方根, 则 $a^2 b = a\bar{a} = 1$. 因此 $ab = \bar{a}$. 将方程两边都乘 a , 得到 $az + \bar{a}\bar{z} + ac = 0$. 所以方程 $z + b\bar{z} + c = 0$ 表示一条直线, 当且仅当 $|b| = 1$ 且 $c^2/b = (ac)^2$ 为正实数.

平面上的直线也可以用参数表示. 设 $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, 则 $z = at + b$ ($t \in \mathbb{R}$) 表示过 b 点且方向为 a 的直线.

圆的几何描述为到定点的距离为定长的点的轨迹. 因此圆周的方程为

$$|z - a| = r,$$

其中 $a \in \mathbb{C}$ 为圆心, $r > 0$ 为半径. 而 $|z - a| < r$ 则表示圆的内部 (即圆盘).

与定点 a, b ($a \neq b$) 的距离之和为常数 r ($r > |a - b|$) 的点的轨迹为椭圆, 方程为

$$|z - a| + |z - b| = r.$$

为了比较这个方程与椭圆的标准方程, 作仿射变换 $w = (2z - a - b)/(a - b)$, 变换将 a, b 分别映为 $1, -1$. 令 $R = r/|a - b|$, 则方程变为

$$|w - 1| + |w + 1| = 2R \quad (R > 1).$$

记 $w = u + iv$, 两边平方然后整理得到

$$|w - 1| \cdot |w + 1| = 2R^2 - (u^2 + v^2 + 1).$$

再次平方然后整理即得到椭圆的标准方程

$$\frac{u^2}{R^2} + \frac{v^2}{R^2 - 1} = 1 \quad (R > 1).$$

与定点 $a, b (a \neq b)$ 的距离之差为常数 $r (0 < r < |a - b|)$ 的点的轨迹为双曲线, 方程为

$$||z - a| - |z - b|| = r.$$

作如上相同的变换就得到双曲线的标准方程

$$\frac{u^2}{R^2} - \frac{v^2}{1 - R^2} = 1 \quad (0 < R < 1).$$

与直线 $\operatorname{Re}(az) = k$ ($|a| = 1, k \in \mathbb{R}$) 和点 $b \in \mathbb{C}$ 的距离相等的点的轨迹为抛物线. 点 z 到直线的距离为 $|\operatorname{Re}(az) - k|$, 因此抛物线方程为

$$|z - b| = |\operatorname{Re}(az) - k|.$$

取 $b = i/4, a = i, k = 1/4$ 代入方程, 并记 $z = x + iy$. 整理后即得到抛物线的标准方程 $y = x^2$.

一般情形经过仿射变换就得到如上标准形式. 变换应将 b 点映为 $i/4$, 将直线映为水平直线 $\operatorname{Re}(iw) = 1/4$. 经计算变换为

$$w = \frac{ia}{2[\operatorname{Re}(ab) - k]}(z - b) + \frac{i}{4}.$$

1.9 球面表示

在数学分析中无穷 ∞ 通常被认为是一个变化过程. 而在复分析中我们却把无穷 ∞ 看成一个点加入复平面 $\mathbb{C}$ 中, 记为 $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 或者 $\widehat{\mathbb{C}}$, 称为扩充复平面. 我们将在后面的学习中逐渐体会到这样处理的方便之处.

首先我们建立从 $\bar{\mathbb{C}}$ 到三维空间的单位球面的一个一一对应. 记 $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{R}\}$ 为三维欧氏空间, 其中的单位球面 S^2 可以表示为方程 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. 当 $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1)$ 时, 定义

$$z = p(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

由上式和球面方程, 得到

$$|z|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}.$$

记 $z = x + iy$. 得到

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1}. \quad (1.6)$$

记 $N = (0, 0, 1)$ 为北极点, 补充定义 $p(N) = \infty$, 则 $p: S^2 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ 为一一对应.

上述对应应有明显的几何意义. 由 (1.6) 得到

$$x : y : (-1) = x_1 : x_2 : (x_3 - 1).$$

这说明点 $(x, y, 0)$ 是过球面上的点 (x_1, x_2, x_3) 和 N 的直线与平面 $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ 的唯一交点 (图 1.3). 因此映射 p 是以 N 为中心的中心投影, 称为球极投影. 为此 $\bar{\mathbb{C}}$ 也称为 **Riemann (黎曼) 球面**.

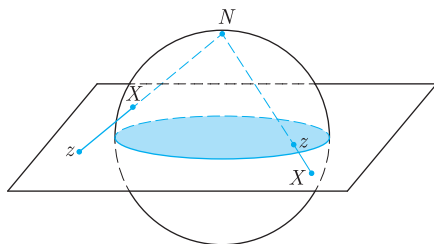


图 1.3 球极投影

定理 1.1 球极投影将球面上的任意一个圆周映为平面上的一个圆周或者一条直线. 反之亦然.

证明 设球面上的圆周所在的平面方程为 $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_0$, 其中 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, a_0 \geq 0$. 当 (x_1, x_2, x_3) 在圆周上时,

$$a_0 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \leq \frac{1}{2}[(a_1^2 + x_1^2) + (a_2^2 + x_2^2) + (a_3^2 + x_3^2)] = 1.$$

不等式中的等号成立当且仅当 $(x_1, x_2, x_3) = (a_1, a_2, a_3)$. 这说明平面与单位球面只有一个交点, 这是不可能的, 因此 $a_0 < 1$. 将公式 (1.6) 代入平面方程得到

$$2a_1x + 2a_2y + a_3(|z|^2 - 1) = a_0(|z|^2 + 1),$$

展开得到

$$(a_0 - a_3)(x^2 + y^2) - 2a_1x - 2a_2y + a_0 + a_3 = 0.$$

当 $a_0 = a_3$ 时, a_1, a_2 不全为零. 上述方程化为

$$a_1x + a_2y = a_3,$$

它表示平面上的一条直线. 反过来, 平面上的任意一条直线都可以表示为这个方程. 当 $a_0 \neq a_3$ 时, 方程可以化为

$$\left(x - \frac{a_1}{a_0 - a_3}\right)^2 + \left(y - \frac{a_2}{a_0 - a_3}\right)^2 = \frac{1 - a_0^2}{(a_0 - a_3)^2}. \quad (1.7)$$

由于 $a_0 < 1$, 上述方程表示以 z_0 为圆心, 半径为 r 的圆周, 其中

$$z_0 = \frac{a_1 + ia_2}{a_0 - a_3}, \quad r = \frac{\sqrt{1 - a_0^2}}{|a_0 - a_3|}.$$

由上述等式以及关系式 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$, $a_0 \geq 0$, 可以反解出: 当 $s = |z_0|^2 - r^2 + 1 \geq 0$ 时,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{s}{\sqrt{4r^2 + s^2}}, & a_1 &= \frac{2\operatorname{Re} z_0}{\sqrt{4r^2 + s^2}}, \\ a_2 &= \frac{2\operatorname{Im} z_0}{\sqrt{4r^2 + s^2}}, & a_3 &= \frac{s - 2}{\sqrt{4r^2 + s^2}}. \end{aligned}$$

当 $s = |z_0|^2 - r^2 + 1 < 0$ 时, 每个等式的右边乘 -1 . 这说明任一圆周都可以表示为方程 (1.7). 因此对应是一一的. $\square$

给定两个点 $z, z' \in \mathbb{C}$. 记 $d(z, z')$ 为这两个点在球极投影下的原像 $(x_1, x_2, x_3), (x'_1, x'_2, x'_3)$ 在三维欧氏空间中的距离. 即

$$\begin{aligned} d(z, z')^2 &= (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 \\ &= 2 - 2(x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3). \end{aligned}$$

当 $z, z' \in \mathbb{C}$ 时, 由 (1.6) 经过计算得到

$$x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 = \frac{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2) - 2|z - z'|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}.$$

最后得到

$$d(z, z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}}.$$

当 $z' = \infty$ 时, 上式变为

$$d(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

我们称 $d(z, z')$ 为这两个点的球面度量.

习题一

1. 计算下列各数:

$$(1) \sqrt{i}; \quad (2) \sqrt{-i}; \quad (3) \sqrt{1+i};$$

$$(4) \sqrt[4]{-1}; \quad (5) \sqrt[4]{i}; \quad (6) \sqrt[4]{-i};$$

$$(7) \sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}.$$

2. 解二次方程 $z^2 + (\alpha + i\beta)z + \gamma + i\delta = 0$.

3. 计算 $\frac{z}{z^2 + 1}$, 其中 $z = x + iy$ 或者 $z = x - iy$, 并验证两个结果共轭.

4. 求下列复数的模:

$$(1) -2i(3+i)(2+4i)(1+i); \quad (2) \frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}.$$

5. 当 $|a| = 1$ 或者 $|b| = 1$, 且 $\bar{a}b \neq 1$ 时, 证明

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1.$$

6. 当 $|a| < 1$ 且 $|b| < 1$ 时, 证明

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1.$$

7. 当 $|a_i| < 1$, $\lambda_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ 时, 证明

$$|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n| < 1.$$

8. 证明存在复数 z 满足 $|z-a| + |z+a| = 2|c|$ 当且仅当 $|a| \leq |c|$. 如果条件成立, 求 $|z|$ 的最大值和最小值.

9. 求点 $a \in \mathbb{C}$ 关于坐标轴分角线的对称点.

10. 证明点 a_1, a_2, a_3 为等边三角形的三个顶点当且仅当 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1$.

11. 设 a 和 b 为正方形的两个顶点, 求另外两个顶点.

12. 设一个三角形的三个顶点分别为 a_1, a_2, a_3 , 求外接圆的圆心和半径.

13. 证明三角形的内角和为 π .

14. 将 $\cos 3\theta$, $\cos 4\theta$ 与 $\sin 5\theta$ 用 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ 表示.

15. 简化 $1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta$ 和 $1 + \sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta$, 其中 $n \geq 2$ 为正整数.

16. 用代数形式表示 5 次单位根和 10 次单位根.

17. 设 $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, $n \geq 2$ 为正整数.

(1) 证明对任意不是 n 的整数倍的整数 k , 有 $1 + \omega^k + \dots + \omega^{(n-1)k} = 0$;

(2) 求 $1 - \omega^k + \omega^{2k} - \dots + (-1)^{n-1} \omega^{(n-1)k}$ 的值.

18. 证明平行四边形的对角线相互平分而菱形的对角线相互正交.

19. 证明一个圆的平行弦的中点在垂直于这些弦的直径上.

20. 证明过 $a \in \mathbb{C}$ 与 $1/\bar{a}$ 的所有圆周都与单位圆周正交.
21. 分析方程 $az + b\bar{z} + c = 0$ 所表示的几何图形.
22. 证明点 z 和 z' 位于 Riemann 球面上一条直径的两个端点当且仅当 $zz' = -1$.
23. 一个立方体的所有顶点都在单位球面上, 各棱平行于坐标轴, 求各顶点的球极投影的像.
24. 设 $z, z' \in \mathbb{C}$ 为不同的点, X, X' 为它们在球极投影下的原像, $N = (0, 0, 1)$. 证明 $\triangle NX X'$ 与 $\triangle Nzz'$ 相似.
25. 求圆心为 a 、半径为 R 的圆周在球极投影下的原像的半径.