

# 前言

泛函分析起源于 19 世纪末和 20 世纪初,并最终在 20 世纪二三十年代建立起来,成为一个独立的数学分支。在其发展的过程中,泛函分析除自身提出了很多有意义并且困难的问题外,也成为了理解与研究各种现代分析数学,乃至量子物理等领域的必不可少的工具。对于有志于从事数学研究和数学应用工作的学生来说,通常都需要熟悉泛函分析的基本概念和方法。学习这门课程,对于他们理解数学的整体性也大有裨益。

泛函分析,顾名思义,是分析学的一个分支,涉及数学中处理函数的部分。粗略地说,它是研究赋予拓扑结构的线性空间及其上映射的一门学科,并且假定这些映射满足特定的代数和拓扑的条件,从而它涵盖了现代分析诸如常微分方程、偏微分方程、动力系统等领域相当大的一部分。由于泛函分析中的线性空间通常是无限维的,对极限行为的研究不可避免地涉及许多几何概念。而对于空间上的(线性)映射,在选定一个基后,可以用一个无穷阶矩阵来表示,自然而然地可使用线性代数的方法处理。Hilbert 在他 1906 年的研究中就使用无穷维线性方程组的思想处理了积分方程,这种新颖的视角为常微分方程和偏微分方程的发展提供了所需的框架。尽管很快就能认识到无穷阶矩阵并不能有效地表达无穷维空间映射的特征,然而引入对偶、特征值等线性代数的概念依旧成为研究这些映射问题的必要途径。综合使用代数和几何手段处理分析中的问题,抽象概括就形成了泛函分析的一些基本定理和算子谱理论等内容。由此泛函分析逐渐成长为数学科学的一个重要分支,并与其他数学分支和物理学领域广泛交融、协同发展,已经成为分析学研究者知识体系中不可或缺的一部分。

自 1932 年 Banach 出版专著 *Théorie des Opérations Linéaires* 以来,泛函分析领域已经涌现出许多优秀的教材。复旦大学数学类专业在泛函分析方向有着悠久的历史,夏道行、严绍宗先生在 20 世纪 50 年代末、60 年代初就开始在本科阶段开设泛函分析课程,这在当时国际上是非常先进的教学尝试。他们从 60 年代初到 80 年代编写的几套教材至今都有很大的影响。在过去几十年中,陈晓漫教授、郭坤宇教授花费了大量的心血建设泛函分析课程,形成了复旦的特色。本书的三

位编者都曾多次教授这门课程, 针对学生的现状和实际需求精心选择和安排了课程内容, 积累了一定的经验和体会, 并最终形成了这本教材。

本书的正文部分讲述了本科生泛函分析的基础内容。首先从无限维线性空间的结构讲起, 逐步引导学生理解 Banach 空间的概念。接下来, 又详细介绍了有界线性泛函的性质和算子的基本定理, 包括 Hahn-Banach 延拓定理、逆算子定理、闭图像定理和共鸣定理等内容, 这些是泛函分析中的核心工具, 对于理解和应用泛函分析至关重要。在谱理论方面, 本书也提供了相对完整的介绍, 帮助学生建立起对谱概念的直观理解。为了确保内容的可读性和自学效果, 在行文上力求详尽, 尽可能以清晰、易懂的语言解释概念和证明定理。我们希望通过这种方式, 帮助学生从听取课堂上老师的讲解逐步转变为自主学习, 培养他们独立思考和解决问题的能力。

此外, 为了满足不同层次学生的多方位需求, 本书在附录中还加入了一些重要的补充材料。其中包括度量空间中的拓扑性质, 以供未曾修读拓扑课程的学生阅读; 局部凸空间理论, 这是泛函分析中的一个重要分支, 对于理解弱拓扑、弱\*拓扑非常有帮助; 以及  $C^*$  代数与正规算子谱理论, 这些内容在现代泛函分析研究和数学物理应用中是极为重要的。

根据编者的经验, 本书的正文内容对于普通班级学生来说是适合的, 按每周 3 学时可于一学期内讲授完毕。在针对拔尖学生开设的课程中, 则可适当调整课程节奏并合理插入附录中的内容, 丰富课程的深度和广度。

本书也配备了不同层次的习题, 旨在帮助学生巩固所学知识, 并逐步提高解题能力。在编写过程中也注意加入了一些近几十年来新出现的结果作为例题或习题, 对相关领域有兴趣的学生还可阅读对应的参考文献, 为进一步学习现代理论打下基础。

本书在编写过程中得到了教育部基础学科拔尖学生培养计划 2.0 (No. 20212028) 项目资助, 试用过程中许多老师和同学提出了不少宝贵的修改意见, 高等教育出版社的李蕊老师、高旭老师也做了大量的工作, 编者在此一并表示感谢。

这次利用“数学 101 计划”的机会将其出版, 得到了“数学 101 计划”泛函分析课程建设领导小组各位专家的大力支持和帮助, 从课程内容的选取、章节的编排以及数学术语和用词等方面都做了仔细的斟酌。在此, 我们诚挚地感谢泛函分析课程建设领导小组的各位专家 (以姓氏拼音为序): 郭坤宇教授 (复旦大学)、黄文教授 (中国科学技术大学)、李从明教授 (上海交通大学)、楼元教授 (上海交通大学)、杨大春教授 (北京师范大学)、杨孝平教授 (南京大学)。

我们期望本教材能够对国内各高校数学类专业泛函分析课程的教学工作有所促进。限于水平, 疏漏在所难免, 请读者不吝赐教。

作者

2024 年 4 月