第一章

内积空间

正如我们在前言中所说代数学的基本任务之一是几何的代数化和抽象化. 那么具体地如何来实现几何的代数化? 前面已经学习的所有关于线性空间和线性映射/变换的理论, 都是将几何代数化的一部分. 但回想一下, 几何研究中的一些基本几何量, 比如空间中的 "长度" 和 "角度" 等概念, 到目前为止还没有在抽象的线性空间中实现. 这就是从本章开始我们准备着手介绍的内积空间理论.

本章中总假定域 $F=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 并考虑 F 上的线性空间.

1.1 定义与性质

记 $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 为非负实数之集, $\bar{z}$ 表示复数 z 的共轭.

定义 1.1.1 设 V 是域 $F=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的线性空间. 若二元映射 $(\cdot,\cdot): V\times V\to F$ 满足如下性质:

(i) (正性) $(v,v)\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $\forall v\in V$ 且 $(v,v)=0\Leftrightarrow v=\mathbf{0}$;

(ii) (对称性) $(u,v)=\overline{(v,u)}$, $\forall u,v\in V$;

(iii) (数乘线性性) $(au,v)=a(u,v)$, $\forall u,v\in V$, $a\in F$;

(iv) (加法线性性) $(u+v,w)=(u,w)+(v,w)$, $\forall u,v,w\in V$,

则称 $(\cdot,\cdot)$ 是 V 上的内积, 称 V 是具有内积 $(\cdot,\cdot)$ 的**内积空间**.

当 $F=\mathbb{R}$ 或 $F=\mathbb{C}$ 时, 亦分别称 V 是**欧氏空间**或**酉空间**.

在 (ii) 成立的前提下, (iii) 和 (iv) 分别等价于如下的 (iii') 和 (iv'):

(iii') $(u,av)=\bar{a}(u,v)$, $\forall u,v\in V$, $a\in F$;

(iv') $(w,u+v)=(w,u)+(w,v)$, $\forall u,v,w\in V$.

特别地, 若 V 是欧氏空间, 由于实数的复共轭即为本身, 因此 (ii) 和 (iii') 亦可分别表为

$$(u,v)=(v,u)\quad 和\quad (u,av)=a(u,v),\quad \forall u,v\in V,\ a\in F.$$

一般地, 在同一个 F-线性空间 V 上可以定义不同的内积, 从而形成不同的内积空间.

例 1.1.1 (i) 在列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上定义两个实值二元函数 $(\cdot,\cdot)_1$ 和 $(\cdot,\cdot)_2$ 如下:

$$(x,y)_1=x^{\mathrm{T}}y,\quad (x,y)_2=2x^{\mathrm{T}}y,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}^n.$$

则可以验证 $(\cdot,\cdot)_1\neq(\cdot,\cdot)_2$, 并且它们均是 $\mathbb{R}^n$ 上的内积, 从而 $\mathbb{R}^n$ 关于 $(\cdot,\cdot)_1$ 和 $(\cdot,\cdot)_2$ 构成了不同的欧氏空间.

显然 $(\cdot,\cdot)_1$ 定义的内积即为线性空间 $\mathbb{R}^n$ 中向量的点积或点乘 (常记为 $x\cdot y$). 此内积通常称为 $\mathbb{R}^n$ 的**标准内积**.

(ii) 列向量空间 $\mathbb{C}^n$ 上的复值二元函数 $(x,y)=x^{\mathrm{T}}\bar{y}$ 是复线性空间 $\mathbb{C}^n$ 的内积, 亦称为**标准内积**.

若无特别说明, 本书中 $F=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的内积空间 F^n 即指线性空间 F^n 关于标准内积形成的内积空间.

从现在起, 本章中若无特别说明, 内积空间 V 上的内积总记为 $(\cdot,\cdot)$.

例 1.1.2 对实数中有限闭区间 $[a,b]$, 记 $C([a,b])$ 为 $[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$ 之集. 则 $C([a,b])$ 关于函数的加法、函数与实数的数乘运算构成一个实线性空间. 定义实值二元函数

$$(f(x),g(x))=\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t,\quad \forall f(x),g(x)\in C([a,b]).$$

则 $(\cdot,\cdot)$ 是 $C([a,b])$ 上的一个内积, 从而使得 $C([a,b])$ 成为一个欧氏空间. 此内积在工程计算中有着重要应用.

可以验证, 若 $(\cdot,\cdot)$ 是 V 上的一个内积, 则

(i) $(au+bv,w)=a(u,w)+b(v,w)$,

(ii) $(w,au+bv)=\bar{a}(w,u)+\bar{b}(w,v)$,

其中 $u,v,w\in V$, $a,b\in F$. 上述等式反映的性质一般称为欧氏空间内积的**双线性性质**和酉空间内积的**半双线性性质**或**酉双线性性质**.

若 W 是内积空间 V 的一个子空间, 则由定义不难看出 W 关于 V 的内积 (即将 V 上内积映射限制到 W 上) 也构成一个内积空间, 即有:

事实 1.1.1 内积空间的子空间关于原内积亦是内积空间.

正如线性空间中任意向量均可通过在一组基下的坐标向量表示, 内积空间中任意两个向量的内积亦可由其坐标向量表示, 即有内积的如下计算方式.

设 $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是 n 维内积空间 V 的一组基. 定义 V 上内积在 α 下的**度量矩阵**为

$$A=((\alpha_i,\alpha_j))_{n\times n}=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1)&(\alpha_1,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_1,\alpha_n)\\(\alpha_2,\alpha_1)&(\alpha_2,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_2,\alpha_n)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(\alpha_n,\alpha_1)&(\alpha_n,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}.\tag{1.1}$$

设 $u,v\in V$ 在 α 下的坐标分别为

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\qquad y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}.$$

则有如下计算

$$(u,v)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i,\sum_{j=1}^{n}y_j\alpha_j\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i\left(\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i,\alpha_j)\overline{y_j}\right)=x^{\mathrm{T}}A\bar{y}. \tag{1.2}$$

由内积的对称性易知如下性质.

命题 1.1.1　域 F 上有限维内积空间的内积在一组基下的度量矩阵 A 是一个 **Hermite (埃尔米特) 矩阵**, 即 $\bar{A}^{\mathrm{T}}=A$. 若 $F=\mathbb{R}$, 则欧氏空间内积的度量矩阵是一个实对称矩阵.

注 1.1.1　对 $F=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的矩阵 $A\in F^{m\times n}$, 记其共轭转置为

$$A^{\mathrm{H}}=\bar{A}^{\mathrm{T}}. \tag{1.3}$$

那么 A 是 Hermite 矩阵即指 $A^{\mathrm{H}}=A$. 显然若 $F=\mathbb{R}$ 则 $A^{\mathrm{H}}=A^{\mathrm{T}}$.

度量矩阵 A 与基相关, 一旦基确定则 A 亦确定. 那么度量矩阵依赖于基的选取, 但是 (u,v) 的值却与基的选取无关. 自然地我们要问, 内积空间上的内积在不同基下的度量矩阵之间有何种联系?

域 F 上两个方阵 A,B 分别称为**合同的**或 **Hermite 合同的**, 若存在 F 上可逆矩阵 M 使得 $B=M^{\mathrm{T}}AM$ 或 $B=M^{\mathrm{T}}A\overline{M}$, 其中 M 称为由 A 到 B 的**合同过渡矩阵**或 **Hermite 合同过渡矩阵**. 由定义易知 F 上方阵的合同和 Hermite 合同分别是等价关系.

注 1.1.2　(i) Hermite 合同适用于 $F=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 而合同适用于一般的域. 特别地, 若 $F=\mathbb{R}$, 则 Hermite 合同即为合同.

(ii) 等价地, A 与 B 是 Hermite 合同的当且仅当存在可逆矩阵 M 使得 $B=M^{\mathrm{H}}AM$.

设 $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 和 $\beta=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 是内积空间 V 的两组基, 从 α 到 β 的过渡矩阵为 M. 若向量 u,v 在基 α 下的坐标分别为 x,y, 在基 β 下的坐标分别为 x',y', 则

$$x=Mx',\quad y=My'. \tag{1.4}$$

设 V 上内积在基 α 和 β 下的度量矩阵分别为 A 和 B, 则

$$(u,v)=x^{\mathrm{T}}A\bar{y}=x'^{\mathrm{T}}B\overline{y'}. \tag{1.5}$$

由 (1.4) 式和 (1.5) 式得

$$x'^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}A\overline{My'}=x'^{\mathrm{T}}B\overline{y'},$$

从而由 x' 和 y' 的任意性易得

$$B = M^{\mathrm{T}} A \overline{M}, \tag{1.6}$$

从而 A, B 是 Hermite 合同的. 由此得如下结论:

命题 1.1.2 一个有限维内积空间上的内积在两组不同基下的度量矩阵是 Hermite 合同的, 且其 Hermite 合同过渡矩阵即为两组基之间的过渡矩阵.

例 1.1.3 已知 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 的一组基, 向量 $u, v \in \mathbb{R}^4$ 在这组基下的坐标分别为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(i) 求标准内积在此基下的度量矩阵 A;

(ii) 求 (u, v).

解 (i) 由定义

$$A = \begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & (\alpha_1,\alpha_3) & (\alpha_1,\alpha_4) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & (\alpha_2,\alpha_3) & (\alpha_2,\alpha_4) \\ (\alpha_3,\alpha_1) & (\alpha_3,\alpha_2) & (\alpha_3,\alpha_3) & (\alpha_3,\alpha_4) \\ (\alpha_4,\alpha_1) & (\alpha_4,\alpha_2) & (\alpha_4,\alpha_3) & (\alpha_4,\alpha_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(ii) 由 (1.2) 式有

$$(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5.$$

□

作为内积空间几何意义的体现, 我们现在引入空间中向量的长度及夹角的概念.

定义 1.1.2 设 V 是内积空间, $v \in V$. 称 $|v| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(v, v)}$ 为 v 的**长度**.

显然, 由定义可知内积的正性条件保证了向量的长度是合理定义的.

对 $k \in F, v \in V$, 易见有 $|kv| = |k||v|$, 因此对内积空间上的数乘的意义可以理解为: 数乘是对向量长度的一个 “倍乘” 作用.

进一步地, 对于内积与长度的关系我们有如下基本结论:

定理 1.1.1 (Cauchy-Schwarz (柯西–施瓦茨) 不等式)　设 V 是域 F 上的内积空间. 则

$$|(u,v)| \leqslant |u||v|, \quad \forall u,v \in V, \tag{1.7}$$

其中等号成立当且仅当 u,v 线性相关.

证明　若 $v=\mathbf{0}$, 则 (1.7) 式两边均为零. 此时显然 α,β 线性相关.

若 $v \neq \mathbf{0}$, 则对任意 $a \in F$ 有

$$0 \leqslant |u-av|^2 = (u-av,u-av) = (u,u) - \bar{a}(u,v) - a(v,u) + a\bar{a}(v,v). \tag{1.8}$$

令 $a = \dfrac{(u,v)}{(v,v)}$, 则上式右边等于 $(u,u) - \dfrac{|(u,v)|^2}{(v,v)}$, 由此即得

$$|(u,v)|^2 \leqslant (u,u)(v,v), \quad 即 \quad |(u,v)| \leqslant |u||v|.$$

若上式中等号成立, 则 (1.8) 式中等号亦成立. 那么 $u = av = \dfrac{(u,v)}{(v,v)}v$, 从而 u,v 线性相关.

反之, 若 u,v 线性相关, 则不妨设 $u=av$, 其中 $a \in F$. 那么

$$|(u,v)| = |a||(v,v)| = |a||v|^2 = |av||v| = |u||v|,$$

即 (1.7) 式中等号成立. □

对例 1.1.1 (ii) 中的标准内积空间 $\mathbb{C}^n$, 定理 1.1.1 即给出中学阶段已熟知的 Cauchy 不等式

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n|^2 \leqslant (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)(|y_1|^2 + |y_2|^2 + \cdots + |y_n|^2),$$

其中 $x_i, y_i \in \mathbb{C}$, $i = 1,2,\cdots,n$.

对例 1.1.2 中的内积空间 $C([a,b])$, 相应的不等式为

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(t)^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b g(t)^2\mathrm{d}t\right).$$

根据定理 1.1.1 和区间 $[-1,1]$ 上的反三角函数 arccos, 我们可以定义欧氏空间中向量的夹角如下:

定义 1.1.3　欧氏空间 V 中非零向量 u,v 的**夹角**定义为

$$\angle(u,v) = \arccos\frac{(u,v)}{|u||v|} \in [0,\pi].$$

对任意向量 $u,v \in V$, 若 $(u,v)=0$, 则称 u,v 在 V 的内积下**正交**或简称为 u,v **正交**, 并记作 $u \perp v$.

此定义中我们要求 V 是欧氏空间, 原因是函数 arccos 定义域为实数区间 $[-1,1]$. 因此酉空间上一般不定义向量的夹角. 但若酉空间 V 中 $(u,v)=0$, 则也称 u,v **正交**并记作 $u\perp v$.

对内积空间 V 中向量 v 和子集 T, 若 v 与 T 中所有向量均正交, 则称 v 与 T 正交并记作 $v\perp T$. 若子集 S 中任意向量均与 T 正交, 则称 S 与 T 正交并记作 $S\perp T$.

例 1.1.4 欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的正交即反映了解析几何中向量的垂直关系.

例 1.1.5 可以验证 $C([-\pi,\pi])$ 的子集 $\{1,\sin x,\cos x,\cdots,\sin nx,\cos nx,\cdots\}$ 中元素在例 1.1.2 的内积下两两正交. 此集合称为区间 $[-\pi,\pi]$ 上的一个**正交函数组**, 与所谓的 **Fourier (傅里叶) 级数**有着紧密的联系.

下面的简单性质由正交的定义直接可得

性质 1.1.1 设 V 是一个内积空间, U,W 是 V 的子空间, $v\in V$. 那么

(i) $v\perp v$ 当且仅当 $v=\mathbf{0}$;

(ii) 若 $v\perp U$ 且 $v\in U$, 则 $v=\mathbf{0}$;

(iii) 若 $U\perp W$, 则 $U\cap W=\{\mathbf{0}\}$.

由定义 1.1.1、定义 1.1.3 以及定理 1.1.1, 可以推出域 F 上的内积空间 V 中长度具有如下性质 (请读者自行证明):

(i) $|v|\geqslant 0$, $\forall v\in V$ 且 $|v|=0\Leftrightarrow v=\mathbf{0}$;

(ii) $|av|=|a||v|$, $\forall a\in F, v\in V$;

(iii) (**三角不等式**) $|u+v|\leqslant |u|+|v|$, $\forall u,v\in V$;

(iv) (**勾股定理**) 若 $u,v\in V$ 且 $u\perp v$, 则 $|u+v|^2=|u|^2+|v|^2$.

(i)—(iv) 说明内积空间中向量长度的概念与三维现实线性空间中通常的长度概念有着相同的性质.

在内积空间中若一个子集中的向量均非零且两两正交, 则称其为**正交向量集**.

定理 1.1.2 内积空间中的正交向量集必为线性无关向量集, 但反之不然.

证明 设 $\{v_i\mid i\in I\}$ 是内积空间 V 的一个正交向量集, 即 $v_i\neq\mathbf{0}$, $\forall i\in I$ 且 $(v_i,v_j)=0$, $\forall i,j\in I$, $i\neq j$. 设有不同指标 $i_1,i_2,\cdots,i_n\in I$ 和元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in F$ 使得

$$a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n=\mathbf{0}.$$

对 $i=1,2,\cdots,n$, 两边与 v_i 做内积即得 $a_i(v_i,v_i)=0$, 再由 $v_i\neq\mathbf{0}$ 得 $a_i=0$. 因此 $\{v_i\mid i\in I\}$ 线性无关.

作为逆命题不成立的例子, $\mathbb{R}^2$ 中向量 $(1,0)$ 和 $(1,1)$ 线性无关但不正交. □

若内积空间的一个正交向量集中每个向量均是单位向量, 则称其为**标准正交集**.

定理 1.1.3 设 V 是域 F 上的内积空间, $S=\{v_i\mid i\in I\}$ 是 V 的一个正交向量

集, 则对任意 $u \in \operatorname{Span} S$ 有

$$u = \sum_{i \in I} \frac{(u, v_i)}{(v_i, v_i)} v_i,$$

其中至多有有限个 $i \in I$ 使得 $(u, v_i) \neq 0$.

证明　设 $u = \sum_{j \in I} a_j v_j$, 其中 $a_j \in F$, $j \in F$ 且至多有限个非零. 那么对 $i \in I$ 有

$$(u, v_i) = \left(\sum_{j \in I} a_j v_j, v_i \right) = a_i (v_i, v_i),$$

由 $v_i \neq \mathbf{0}$ 即得 $a_i = \dfrac{(u, v_i)}{(v_i, v_i)}$. □

推论 1.1.1　若定理 1.1.3 中 S 是标准正交集, 则对任意 $u \in \operatorname{Span} S$ 有 $u = \sum_{i \in I} (u, v_i) v_i$.

习题 1.1

1. 问如下定义的映射是不是一个内积?

(i) $(u, v) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2}$;

(ii) $(u, v) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \right)$;

(iii) $(u, v) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i b_i \ (k_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n)$.

这里 $u = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$, $v = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的向量.

2. 设 $u = (a_1, a_2)$, $v = (b_1, b_2)$ 为二维实线性空间 $\mathbb{R}^2$ 中的任意两个向量. 问: 如下定义的映射是不是一个内积?

(i) $(u, v) = a_1 b_2 + a_2 b_1$;

(ii) $(u, v) = (a_1 + a_2) b_1 + (a_1 + 2a_2) b_2$;

(iii) $(u, v) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 1$.

3. 在一个内积空间 V 中, 定义向量 u 与 v 的距离为 $d(u, v) = |u - v|$. 证明: 对于 V 中的向量 v_1, v_2, v_3 而言, 有如下不等式:

$$d(v_1, v_3) \leqslant d(v_1, v_2) + d(v_2, v_3).$$

4. 证明: 在一个内积空间 V 中, 对任意向量 u, v, 以下等式成立:

(i) $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$;

(ii) $(u, v) = \dfrac{1}{4}|u + v|^2 - \dfrac{1}{4}|u - v|^2$.

5. 在欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 中, 求其上的内积在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 下的度量矩阵, 其中 $\alpha_1 = (1,1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,1,1,0)$, $\alpha_3 = (1,1,0,0)$, $\alpha_4 = (1,0,0,0)$.

6. 设 $\mathbb{R}^3$ 关于某内积形成欧氏空间, 已知内积在基 $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,1,0)$, $\alpha_3 = (1,0,0)$ 下的度量矩阵为 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. 求内积在基 $\xi_1 = (1,0,0), \xi_2 = (0,1,0)$, $\xi_3 = (0,0,1)$ 下的度量矩阵.

7. 设 V 是 n 维欧氏空间, 取定 $2n$ 个向量 $v_1, v_2, \cdots, v_n, u_1, u_2, \cdots, u_n \in V$. 证明: 若存在非零向量 $v \in V$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}(v, v_i)u_i = \mathbf{0}$, 则一定存在非零向量 $u \in V$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}(u, u_i)v_i = \mathbf{0}$.

8. 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是域 F 上内积空间 V 中的向量组 (这里 $F = \mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$), 其 Gram (格拉姆) 矩阵定义为

$$G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_n, \alpha_1) & (\alpha_n, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{pmatrix}.$$

(若 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是一组基, 则上式定义的 Gram 矩阵就是内积的度量矩阵.) 令

$$R = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n \mid x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \mathbf{0} \right\}.$$

证明: $x \in R$ 当且仅当 $G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)x = \mathbf{0}$.

9. (i) 设有 n 维欧氏空间 V 中的向量 $v_1, v_2, \cdots, v_{n+1}$, 使得 $(v_i, v_j) < 0$ 对于任意的 $i \neq j$ 均成立. 证明: $v_1, v_2, \cdots, v_{n+1}$ 中任意 n 个向量均构成 V 的一组基;

(ii) 设有 n 维欧氏空间 V 中的 m 个向量 $v_1, v_2, \cdots, v_m$, 使得 $(v_i, v_j) < 0$ 对于任意的 $i \neq j$ 均成立. 证明: $m \leqslant n + 1$.

10. 设 n 维内积空间 V 中有 m 维子空间 U 和 W, 以及 U 中非零向量 u 使得 $u \perp W$. 证明: 存在 W 中非零向量 w 使得 $w \perp U$.

1.2　标准正交基和正交补

定义 1.2.1　若内积空间 V 的一组基 $\{\xi_i \mid i \in I\}$ 同时是正交向量集, 则称其为 V 的一组**正交基**. 若此基是标准正交向量集, 则称其为 V 的一组**标准正交基**.

容易验证下面的结论, 请读者自行证明.

命题 1.2.1　n 维内积空间 V 的一组基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 V 的一组正交基 (标准正交基) 的充要条件是 V 上内积在此基下的度量矩阵是对角矩阵 (单位矩阵).

例 1.2.1　对 $F = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 标准基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 F^n 的一组标准正交基.

一个基本的问题, 是否任意一个内积空间中都存在 (标准) 正交基? 本节中我们将通过构造性的方法证明任意一个有限维内积空间中都存在 (标准) 正交基.

定理 1.2.1 (Schmidt (施密特) 正交化)　设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 n 维内积空间 V 的一组基. 那么存在 V 的一组正交基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 使得

$$\operatorname{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i\} = \operatorname{Span}\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_i\}, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.9}$$

其中 $\eta_1 = \alpha_1$, 并对 $i = 2, \cdots, n$ 有

$$\eta_i = \alpha_i - \frac{(\alpha_i, \eta_1)}{(\eta_1, \eta_1)}\eta_1 - \frac{(\alpha_i, \eta_2)}{(\eta_2, \eta_2)}\eta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_i, \eta_{i-1})}{(\eta_{i-1}, \eta_{i-1})}\eta_{i-1}. \tag{1.10}$$

证明　我们通过对 $i = 1, 2, \cdots, n$ 归纳证明 (1.10) 式递推定义的向量组 $\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_i\}$ 是正交向量集, 即其中向量非零且两两正交, 并且 (1.9) 式成立. 特别地, 当 $i = n$ 时正交向量集 $\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n\}$ 即为 V 的一组正交基.

当 $i = 1$ 时 $\eta_1 = \alpha_1$ 非零, 结论显然. 假设结论对 $i - 1$ 成立, 并由 (1.10) 式定义 η_i. 下面证明结论对 i 成立. 由 (1.10) 式不难看出

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i \in \operatorname{Span}\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_i\}.$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i$ 线性无关即知 (1.9) 式成立且 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_i$ 线性无关. 特别地 $\eta_i \neq \mathbf{0}$. 那么只需再证明对 $j = 1, 2, \cdots, i-1$ 有 η_i 与 η_j 正交. 由归纳假设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{i-1}$ 两两正交, 因此 (1.10) 式两边与 η_j 做内积即得

$$(\eta_i, \eta_j) = (\alpha_i, \eta_j) - \frac{(\alpha_i, \eta_j)}{(\eta_j, \eta_j)}(\eta_j, \eta_j) = 0.$$

由归纳法结论证毕. □

由定理 1.2.1, 有限维内积空间 V 总存在正交基.

注 1.2.1 要构造 n 维内积空间的一组标准正交基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, 有两种等价的方式.

(i) 先完成上述 Schmidt 正交化过程获得一组正交基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$, 然后对每个基向量单位化即得一组标准正交基 $\xi_1=\dfrac{\eta_1}{|\eta_1|},\cdots,\xi_n=\dfrac{\eta_n}{|\eta_n|}$;

(ii) 令 $\eta_1=\alpha_1$, $\xi_1=\dfrac{\eta_1}{|\eta_1|}$, 并对 $i=2,\cdots,n$ 归纳地定义

$$\eta_i=\alpha_i-(\alpha_i,\xi_1)-(\alpha_i,\xi_2)-\cdots-(\alpha_i,\xi_{i-1}),\quad \xi_i=\frac{\eta_i}{|\eta_i|}.$$

注 1.2.2 当内积空间 V 是可数无限维时, 对其一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ 同样可用上面的 Schmidt 正交化过程构造 (标准) 正交基.

例 1.2.2 已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基. 求 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基 ξ_1,ξ_2,ξ_3 使得 $\mathrm{Span}\{\alpha_1\}=\mathrm{Span}\{\xi_1\}$, $\mathrm{Span}\{\alpha_1,\alpha_2\}=\mathrm{Span}\{\xi_1,\xi_2\}$.

解 作 Schmidt 正交化

$$\eta_1=\alpha_1,\quad \eta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\eta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1-\frac{(\alpha_3,\eta_2)}{(\eta_2,\eta_2)}\eta_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

再将 η_1,η_2,η_3 单位化即得符合要求的一组标准正交基

$$\xi_1=\frac{\eta_1}{|\eta_1|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad \xi_2=\frac{\eta_2}{|\eta_2|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \xi_3=\frac{\eta_3}{|\eta_3|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

□

设 $\xi=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ 和 $\eta=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\}$ 是内积空间 V 的两组标准正交基, $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是从基 ξ 到基 η 的过渡矩阵. 那么

$$\eta_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\xi_k,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

于是有

$$\begin{aligned}\delta_{ij}=(\eta_i,\eta_j)&=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\xi_k,\sum_{l=1}^{n}a_{lj}\xi_l\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{ki}\overline{a_{lj}}(\xi_k,\xi_l)\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{ki}\overline{a_{lj}}\delta_{kl}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\overline{a_{kj}}.\end{aligned}$$

这表明 $A^{\mathrm{T}}\bar{A}=I_n$, 也等价于 $A^{\mathrm{H}}A=I_n$, 其中按 (1.3) 式 $A^{\mathrm{H}}=\bar{A}^{\mathrm{T}}$ 表示 A 的共轭转置. 那么 A 可逆且

$$A^{-1}=A^{\mathrm{H}}.$$

由此我们引入如下定义:

定义 1.2.2 设 A 是域 $F=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶方阵. 若 $AA^{\mathrm{H}}=I_n$, 即 $A^{-1}=A^{\mathrm{H}}$, 则称 A 是一个 n 阶**正交矩阵**或 n 阶**酉矩阵**. 特别地, 正交矩阵 A 是酉矩阵, 且 $A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$.

由定义容易验证如下事实:

事实 1.2.1 (i) 酉矩阵 (正交矩阵) 的乘积、转置、共轭、逆矩阵仍为酉矩阵 (正交矩阵);

(ii) 酉矩阵的行列式模为 1, 特别地, 正交矩阵的行列式总是 ± 1.

定理 1.2.2 设 V 是 $F=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的 n 维内积空间. 那么

(i) 对 V 的两组基 $\xi=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$, $\eta=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\}$ 以及从 ξ 到 η 的过渡矩阵 A, 下面三个陈述中任意两个成立蕴涵余下的一个也成立:

① ξ 是标准正交基;

② η 是标准正交基;

③ A 是酉矩阵.

(ii) $A\in F^{n\times n}$ 是酉矩阵当且仅当它是 F^n 中某两组标准正交基间的过渡矩阵.

(iii) $A\in F^{n\times n}$ 是酉矩阵当且仅当 A 的列 (行) 向量组是 F^n 上的一组标准正交基.

证明 (i) 下面的证明中我们使用命题 1.2.1 的结论.

(1) + (2) $\Rightarrow$ (3). V 上内积在 ξ 和 η 下的度量矩阵均为 I_n, 因此由 (1.6) 式得 $I_n=A^{\mathrm{T}}I_n\bar{A}$, 从而 A 是酉矩阵.

(1)+(3) $\Rightarrow$ (2). V 上内积在 ξ 下的度量矩阵为 I_n. 再由 (1.6) 式得 V 上内积在 η 下的度量矩阵为 $A^{\mathrm{T}}I_n\bar{A}=I_n$, 因此 ξ 亦是标准正交基.

(1)+(2) $\Rightarrow$ (3). η 到 ξ 的过渡矩阵 A^{-1} 亦是酉矩阵, 那么同上即得.

(ii) **充分性**. 由 (i) 中 (1) + (2) $\Rightarrow$ (3) 即得.

必要性. 设 A 是酉矩阵. 那么 A 的列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 构成 F^n 的一组基, 且标准正交基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 到 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 的过渡矩阵即为 A. 由 (i) 中 (1)+(3) $\Rightarrow$ (2) 即知 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是标准正交基.

(iii) 由上述讨论以及 (1.6) 式, F^n 上内积在 A 的列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的度量矩阵为 $A^{\mathrm{T}}I_n\bar{A}$. 因此 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是标准正交基当且仅当 $A^{\mathrm{T}}\bar{A}=I_n$, 当且仅当 A 是酉矩阵.

对 A 的行向量同理可证. □

命题 1.2.2 设 V 是 n 维内积空间, $\xi=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ 是 V 的一组标准正交基. 那么 V 上线性变换 φ 在 ξ 下的矩阵为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 其中 $a_{ij}=(\varphi(\xi_j),\xi_i)$, $i,j=1,2,\cdots,n$.

证明 由定理 1.1.3, $\varphi(\xi_j)=\sum\limits_{i=1}^{n}(\varphi(\xi_j),\xi_i)\xi_i$. 由定义 $(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj})^{\mathrm{T}}$ 是 $\varphi(\xi_j)$ 在 ξ 下的坐标, 因此结论成立. □

在本节最后, 我们讨论内积空间中特殊类型的子空间直和——**正交和**.

定义 1.2.3 设 V 是内积空间.

(i) 若 $V_1,V_2,\cdots,V_k$ 是 V 的 k 个子空间且两两正交, 则称其和空间 $V_1+V_2+\cdots+V_k$ 为**正交和**;

(ii) 若 V 有子空间 W,U 满足 $V=W+U$ 是正交和, 则称 W 与 U 互为**正交补**.

由性质 1.1.1 (iii) 知, 两个子空间的正交和必为直和. 进一步对有限个子空间的情形同样有:

定理 1.2.3 若内积空间 V 中的子空间 $V_1,V_2,\cdots,V_k$ 两两正交, 则正交和 $V_1+V_2+\cdots+V_k$ 必是直和, 但反之不然.

证明 由假设可知对 $i=1,2,\cdots,k$ 有 $V_i\perp\left(\sum\limits_{j\neq i}V_j\right)$, 那么由性质 1.1.1 (iii) 有

$$V_i\cap\left(\sum_{j\neq i}V_j\right)=\mathbf{0}.$$

根据定义 $V_1+V_2+\cdots+V_k$ 是直和.

作为逆命题不成立的例子, 直和 $\mathbb{R}^2=\mathrm{Span}\{(1,0)\}+\mathrm{Span}\{(1,1)\}$ 不是正交和. □

特别地, 正交补必为直和补, 但反之不然. 由直和理论已经知道, 直和补必然存在但一般不唯一. 但更强条件下的正交补存在且唯一, 即有:

定理 1.2.4 有限维内积空间 V 的每个子空间 W 存在唯一的正交补 U.

证明 先证明存在性. 令

$$U=\{u\in V\mid (u,w)=0,\forall w\in W\}.$$

易验证 U 是 V 的子空间, 且显然 $W\perp U$. 取 U 的一组正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 并扩充为 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$. 容易看出 Schmidt 正交化可将其变为一组

正交基

$$\eta_1=\alpha_1,\ \eta_2=\alpha_2,\ \cdots,\ \eta_m=\alpha_m,\ \eta_{m+1},\eta_{m+2},\ \cdots,\ \eta_n.$$

由于 $\eta_{m+1},\cdots,\eta_n\in U$, 因此有 $V=W+U$, 从而 U 是 W 的正交补.

再证明唯一性. 若 $V=W+U'$ 是正交和, 则由定义显然有 $U'\subseteq U$. 由于 $W+U$ 和 $W+U'$ 均为直和, 我们有

$$\dim U=\dim V-\dim W=\dim U',$$

因此 $U=U'$. □

由定理 1.2.4 及其证明, 我们可将有限维内积空间 V 的子空间 W 唯一的正交补记为

$$W^{\perp}=\{u\in V\mid (u,w)=0,\forall w\in W\}. \tag{1.11}$$

从而 $V=W\oplus W^{\perp}$. 特别地,

$$\dim W+\dim W^{\perp}=\dim V,$$

即任意子空间与其正交补的维数之和恰为整个空间的维数.

此时任意 $v\in V$ 都可唯一地分解为 $v=w+u$, 其中 $w\in W$, $u\in W^{\perp}$, 即 $(w,u)=0$. 我们称 w 为向量 v 在子空间 W 上的**内射影**或**投影**. 此定义来源于几何, 比如我们有下面的例子:

设 $V=\mathbb{R}^3$, 子空间 W 为平面 xOy, 则 $W^{\perp}$ 就是 z 轴. 任意向量 $v=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ 有分解 $v=w+u$, 其中 $w=(a,b,0)\in W$, $u=(0,0,c)\in W^{\perp}$. 那么 v 在 W 上的投影 w 即为从原点到由 v 的顶端对 xOy 平面作垂线所得垂足的向量 (参见图 1.1).

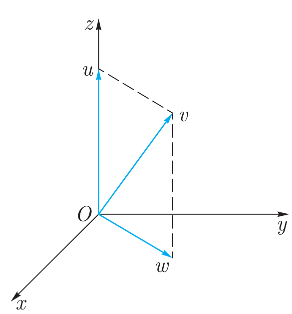

图 1.1

例 1.2.3 设有 $\mathbb{R}^3$ 的基 $\alpha_1=(1,1,0)$, $\alpha_2=(1,0,0)$, $\alpha_3=(0,0,1)$ 和向量 $v=(1,2,3)$. 令 $W=\mathrm{Span}\{\alpha_1,\alpha_2\}$. 那么 $W^{\perp}=\mathrm{Span}\{\alpha_3\}$. 易知 $v=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$, 而 $2\alpha_1-\alpha_2\in W$, $3\alpha_3\in W^{\perp}$, 因此 v 在 W 上的投影为 $2\alpha_1-\alpha_2$.

读者可尝试对无限维内积空间 V 的有限维子空间 W 证明定理 1.2.4.

习题 1.2

1. 设 A, B 是 n 阶实对称矩阵, 定义 $(A,B)=\operatorname{tr}(AB)$.

(i) 证明: 所有 n 阶实对称矩阵所组成的线性空间 V 关于内积 $(\cdot\ ,\ \cdot)$ 成为一个欧氏空间;

(ii) 求 V 的维数;

(iii) 求使得 $\operatorname{tr}(A)=0$ 的所有 A 构成的子空间 W 的维数;

(iv) 求 $W^{\perp}$ 的一个基.

2. 证明: 次数小于 4 的所有一元多项式以 $(f,g)=\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 为内积构成欧氏空间 $\mathbb{R}[x]_4$. 令 V 是常数多项式组成的子空间. 求 $V^{\perp}$ 以及它的一个基.

3. 设 V 是一个内积空间.

(i) 设向量 $u, v\in V$ 等长, 证明: $u+v$ 与 $u-v$ 正交;

(ii) 令 V 是有限维的, 设 W 是 V 的子空间, 证明: $\dim W+\dim W^{\perp}=n$, $(W^{\perp})^{\perp}=W$;

(iii) 一般地，$(W^{\perp})^{\perp}\supseteq W$. 举例使得 $(W^{\perp})^{\perp}\supsetneqq W$.

4. 设 W_1, W_2 是欧氏空间 V 的两个子空间. 证明:

(i) $(W_1+W_2)^{\perp}=W_1^{\perp}\cap W_2^{\perp}$;

(ii) $(W_1\cap W_2)^{\perp}=W_1^{\perp}+W_2^{\perp}$.

5. 在欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 中求一单位向量 v, 使其与 $(1,1,-1,1)$, $(1,-1,-1,1)$, $(2,1,1,3)$ 正交.

6. (i) 设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是三维欧氏空间中一组标准正交基, 证明: $\alpha_1=\dfrac{1}{3}(2\xi_1+2\xi_2-\xi_3)$, $\alpha_2=\dfrac{1}{3}(2\xi_1-\xi_2+2\xi_3)$, $\alpha_3=\dfrac{1}{3}(\xi_1-2\xi_2-2\xi_3)$ 也是一组标准正交基;

(ii) 设 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\xi_5$ 是五维欧氏空间 V 中一组标准正交基. 令 $V_1=\operatorname{Span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$, 其中 $\alpha_1=\xi_1+\xi_5$, $\alpha_2=\xi_1-\xi_2+\xi_4$, $\alpha_3=2\xi_1+\xi_2+\xi_3$. 求 V_1 的一个标准正交基.

7. 下列矩阵是不是正交矩阵? 说明理由:

$$\text{(i)}\ \begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix};\qquad \text{(ii)}\ \begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{6} & \dfrac{\sqrt{2}}{3}\\[2mm] 0 & -\dfrac{2\sqrt{2}}{3} & \dfrac{\sqrt{1}}{3}\\[2mm] -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{6} & \dfrac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

8. 设 α 为 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的单位向量. 证明: 存在 n 阶正交矩阵 A, 使得 α 为 A 的第一列 (或第一行).

9. 设 v 为 n 维列向量, 满足 $v^{\mathrm{T}}v=1$. 令 $A=I_n-2vv^{\mathrm{T}}$, 证明 A 是对称的正交

矩阵.

10. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是内积空间 V 的一组基. 证明:

(i) 若 $v \in V$ 满足 $(v, \alpha_i) = 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则 $v = \mathbf{0}$;

(ii) 若 $v_1, v_2 \in V$ 满足 $(v_1, w) = (v_2, w)$, $\forall w \in V$, 则 $v_1 = v_2$.

11. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 n 维欧氏空间 V 中一组向量. 称其 Gram 矩阵的行列式

$$|G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)| = \begin{vmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_m) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_m, \alpha_1) & (\alpha_m, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_m, \alpha_m) \end{vmatrix}$$

为 Gram 行列式. 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关当且仅当 $|G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)| = 0$.

12. 给定欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 的向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2 = (0, 1, 2, 1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3 = (-2, 1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

(i) 求出 $\mathrm{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 的一组标准正交基;

(ii) 将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 扩充成 $\mathbb{R}^4$ 的一组标准正交基.

13. 设 A, B 是两个 n 阶正交矩阵, 且 $|AB| = -1$. 证明:

(i) $|A^{\mathrm{T}}B| = |AB^{\mathrm{T}}| = |A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}| = -1$;

(ii) $|A + B| = 0$.

14. 证明: 在 n 维欧氏空间 V 中, 两两成钝角的非零向量不多于 $n+1$ 个.

15. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 n 维欧氏空间 V 中的一组基, 试证明这组基为 V 的一组标准正交基的充要条件为: 对于 V 中任意两个向量 α, β, 若

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n, \quad \beta = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \cdots + y_n\alpha_n,$$

则必有 $(\alpha, \beta) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$.

16. 设 v, w 是 n 维内积空间 V 中两个不同的向量, 且 $|v| = |w| = 1$. 证明: $(v, w) \neq 1$.

17. 设 A 为 n 阶实矩阵, 证明: A 可以分解成

$$A = QR,$$

其中 Q 为正交矩阵, R 是一个对角线上全为非负实数的上三角形矩阵. 当 A 为 n 阶非奇异实矩阵时, R 的对角线上的元素恒正且这种分解是唯一的.

1.3 正交映射与酉映射

与一般线性空间相比, 内积空间具有更丰富的结构. 设 V 和 W 是域 F 上的内积空间, $\varphi: V \to W$ 是线性映射. 我们希望考虑具有特殊性质的 φ, 使其能够反映 V 与 W 内积结构的联系.

定义 1.3.1 设 V 和 W 是 $F=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的内积空间. 若线性映射 $\varphi: V \to W$ 保持内积不变, 即

$$(\varphi(u), \varphi(v)) = (u, v), \quad \forall u, v \in V,$$

则称 φ 是 V 到 W 的**正交映射**或**酉映射**.

此定义的条件称为**保内积性**, 由此条件我们直接得到:

事实 1.3.1 正交映射 (酉映射) 的复合仍是正交映射 (酉映射).

正交映射和酉映射的意义可以通过以下几个方面刻画:

定理 1.3.1 设 φ 是 $F=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上内积空间 V 到 W 的线性映射. 那么下面的条件等价:

(i) **(保内积)** φ 是正交映射或酉映射;

(ii) **(保长度)** φ 保持向量长度不变, 即 $|\varphi(v)| = |v|, \forall v \in V$;

(iii) **(保标准正交集)** 若 $\{v_i \mid i \in I\}$ 是 V 的标准正交集, 则 $\{\varphi(v_i) \mid i \in I\}$ 是 W 的标准正交集.

证明 (i) $\Leftrightarrow$ (ii). 若 φ 保内积, 则对任意 $v \in V$ 有 $(\varphi(v), \varphi(v)) = (v, v)$, 从而 $|\varphi(v)| = |v|$.

反之, 若 φ 保长度, 则对任意 $u, v \in V$ 有

$$\begin{aligned}
2\operatorname{Re}(\varphi(u), \varphi(v)) &= (\varphi(u), \varphi(v)) + (\varphi(v), \varphi(u)) \\
&= |\varphi(u+v)|^2 - |\varphi(u)|^2 - |\varphi(v)|^2 \\
&= |u+v|^2 - |u|^2 - |v|^2 \\
&= (u, v) + (v, u) = 2\operatorname{Re}(u, v).
\end{aligned}$$

若 $F=\mathbb{R}$, 则由上式即得 $(\varphi(u), \varphi(v)) = (u, v)$. 若 $F=\mathbb{C}$, 则由任意性以 $\mathrm{i}v$ 代替 v 易得

$$\operatorname{Im}(\varphi(u), \varphi(v)) = \operatorname{Re}(-\mathrm{i}(\varphi(u), \varphi(v))) = \operatorname{Re}(\varphi(u), \varphi(\mathrm{i}v)) = \operatorname{Re}(u, \mathrm{i}v) = \operatorname{Im}(u, v),$$

因此有 $(\varphi(u), \varphi(v)) = (u, v)$.

由于保内积显然蕴涵保正交性, (i) + (ii) $\Rightarrow$ (iii) 是显然的.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) 亦显然. 任意 $v \in V$ 均可表为 $v = au$, 其中 $u \in V$ 是单位向量, $a \in F$. 那么

$$|\varphi(v)| = |\varphi(au)| = |a\varphi(u)| = |a||\varphi(u)| = |a||u| = |au| = |v|. \qquad \square$$

注 1.3.1 注意到对线性映射 φ, 上述定理中条件 (ii) 也等价于

$$d(\varphi(u), \varphi(v)) = |\varphi(u) - \varphi(v)| = |u - v| = d(u, v), \quad \forall u, v \in V,$$

即 φ 保持向量之间的距离. 因此正交映射和酉映射亦统称为**保距线性映射**.

推论 1.3.1 内积空间 V 到 W 的保距线性映射 φ 必为单射.

证明 对 $v \in \operatorname{Ker}\varphi$ 有 $|v| = |\varphi(v)| = |\mathbf{0}| = 0$, 因此 $v = \mathbf{0}$, 即 $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$, 从而 φ 是单射. $\square$

推论 1.3.2 欧氏空间 V 到 W 的保距线性映射 φ 保持非零向量的夹角, 即对任意非零向量 $u, v \in V$ 有 $\angle(\varphi(u), \varphi(v)) = \angle(u, v)$.

证明 由推论 1.3.1, $\varphi(u), \varphi(v)$ 非零, 因此

$$\angle(\varphi(u), \varphi(v)) = \arccos \frac{(\varphi(u), \varphi(v))}{|\varphi(u)||\varphi(v)|} = \arccos \frac{(u, v)}{|u||v|} = \angle(u, v). \qquad \square$$

现在我们讨论特殊的保距线性映射.

定义 1.3.2 设 V 和 W 是 F 上的内积空间. 若 $\varphi : V \to W$ 是线性同构并且是保距线性映射, 则称 φ 是**保距线性同构**或简称**保距同构**, 称内积空间 V 和 W 关于 φ 是**保距同构的**.

命题 1.3.1 设 V 和 W 是 F 上的有限维内积空间. 那么线性映射 $\varphi : V \to W$ 是保距同构当且仅当 φ 是保距线性映射且是满射.

证明 必要性是显然的. 充分性: 由推论 1.3.1, φ 是单射, 从而是同构. $\square$

线性空间的线性同构是一个等价关系, 而由定义内积空间的保距同构即是保持内积不变的线性同构. 那么保距同构显然是内积空间之间具有自反性、传递性和对称性的一种关系, 即: 恒等映射是保距同构; 两个保距同构的复合是保距同构; 保距同构 $\varphi : V \cong W$ 的逆 $\varphi^{-1} : W \cong V$ 也是保距同构:

$$(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) = (\varphi(\varphi^{-1}(x)), \varphi(\varphi^{-1}(y))) = (x, y), \quad \forall x, y \in W. \tag{1.12}$$

因此内积空间的保距同构是内积空间之间的一个等价关系.

由于线性空间同构当且仅当它们维数相同, 内积空间的保距同构蕴涵着它们有相同的维数. 反之, 维数相同的内积空间是不是保距同构的?

首先我们考虑 F 上的 n 维内积空间 V 和标准内积空间 F^n 之间的关系. 设 $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是 V 的一组标准正交基. 那么有线性同构

$$[\cdot]_\alpha : V\to F^n \quad v\mapsto [v]_\alpha,$$

其中 $[v]_\alpha$ 代表 v 在 α 下的坐标. 由于 V 上内积在 α 下的矩阵为 I_n, 若 $u,v\in V$ 在 α 下的坐标分别为 x,y, 则由 (1.2) 式有

$$(u,v)=x^{\mathrm{T}}\bar{y}=(x,y),$$

因此 $[\cdot]_\alpha$ 是一个保距同构. 这说明任意一个 F 上的 n 维内积空间都与 F^n 保距同构. 又由于保距同构是等价关系, 因此任意两个 n 维内积空间都是保距同构的. 综上所述我们有:

定理 1.3.2 (i) F 上任意一个 n 维内积空间都保距同构于标准内积空间 F^n;

(ii) F 上的两个有限维内积空间是保距同构的当且仅当它们维数相同.

此定理说明从抽象的观点来看, 在保距同构的意义下内积空间的结构完全由其维数决定.

最后讨论另一类特殊的保距线性映射, 即保距线性变换.

定义 1.3.3 若 φ 是内积空间 V 到自身的保距线性映射, 则称 φ 是 V 的**保距线性变换**, 简称**保距变换**. 当 V 是欧氏空间时, 亦称 φ 是**正交变换**; 当 V 是酉空间时, 亦称 φ 是**酉变换**.

当内积空间 V 维数有限时, 由推论 1.3.1 知 V 上的保距线性变换是单射, 从而是 V 到自身的保距同构. 由事实 1.3.1 和 (1.12) 式有

事实 1.3.2 有限维内积空间上保距线性变换的复合和逆变换仍为保距线性变换.

有限维内积空间上三类线性映射的关系是

$$\{\text{保距线性变换}\}\quad\subseteq\quad\{\text{保距线性同构}\}\quad\subseteq\quad\{\text{保距线性映射}\}.$$

作为特殊的保距线性映射, 定理 1.3.1 对保距线性变换当然成立. 此时在定理 1.3.1 (iii) 中, 特别地, 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的标准正交基, 则 $\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2),\cdots,\varphi(\alpha_n)$ 也是 V 的标准正交基. 那么 φ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵即为两组标准正交基之间的过渡矩阵, 从而由定理 1.2.2 (i) 中 (1) + (2) $\Rightarrow$ (3) 可知此矩阵是一个酉矩阵.

因此我们由定理 1.3.1 得到了下面的定理:

定理 1.3.3 设 V 是 $F=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的 n 维内积空间, φ 是 V 上的线性变换. 那么下列陈述等价:

(i) φ 是保距线性变换;

(ii) φ 保持向量长度不变;

(iii) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的标准正交基, 则 $\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2),\cdots,\varphi(\alpha_n)$ 也是 V 的标准正交基;

(iv) φ 在 V 的任意一组标准正交基 α 下的矩阵 A 是正交矩阵或酉矩阵, 即 $A^{\mathrm{H}}A = AA^{\mathrm{H}} = I_n$.

证明 由定理 1.3.1 可知 (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). 容易直接证明 (iii) $\Rightarrow$ (ii), 留作练习.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). 上述讨论中已证.

(iv) $\Rightarrow$ (iii). 由定理 1.2.2 (i) 中 (1)+(3) $\Rightarrow$ (2) 即得. □

注 1.3.2 定理 1.3.1 和上述定理的一个先决条件是要求 φ 是一个线性映射或线性变换. 例如固定 $v_0 \in F^n$, 并在 F^n 上定义一个平移映射

$$\varphi : F^n \to F^n, \quad v \mapsto v + v_0.$$

那么显然 φ 满足注 1.3.1 中的保距条件, 即

$$d(\varphi(u), \varphi(v)) = d(u, v), \quad \forall u, v \in F^n.$$

但当 $v_0 \neq \mathbf{0}$ 时 φ 不是线性变换, 更不是保距线性变换.

习题 1.3

1. 内积空间之间中保持向量长度不变的映射是否一定是保距线性映射? 如果是, 试证明之; 如果不是, 试给出一个反例.

2. 设 U, V, W 是内积空间, φ 是 U 到 V 的保距线性映射, ψ 是 V 到 W 的保距线性映射. 证明: $\psi\varphi$ 是 U 到 W 的保距线性映射.

3. 设 φ 是有限维内积空间 V 到 W 的一个保距线性映射. 问 φ 在 V 和 W 的标准正交基下的矩阵是怎样的?

4. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 为 n 维内积空间中的两个向量组. 证明: 存在保距变换 φ 使得 $\varphi(\alpha_i) = \beta_i, i = 1, 2, \cdots, m$ 的充要条件为 $(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j), i, j = 1, 2, \cdots, m$.

5. 设 φ 为 n 维内积空间 V 上的一个保距变换, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 V 的任意一组基, 此基的度量矩阵为 A, 线性变换 φ 在此基下的矩阵为 M. 证明: $M^{\mathrm{T}}A\overline{M} = A$.

6. 证明: 保距变换特征值的模等于 1.

7. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 为内积空间 V 的两组向量. 证明: 若对 $i, j = 1, 2, \cdots, m$, 有 $(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j)$, 则子空间 $V_1 = \mathrm{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ 与 $V_2 = \mathrm{Span}\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$ 作为内积空间是同构的.

8. 设 φ, ψ 为有限维内积空间 V 上的两个线性变换, 满足 $(\varphi(v), \varphi(v)) = (\psi(v), \psi(v))$, $\forall v \in V$. 证明: 像空间 $V_1 = \varphi(V)$ 与 $V_2 = \psi(V)$ 作为内积空间是同构的.

1.4 欧氏空间的复化

若域 E 是域 F 的一个子域，则称 F 是 E 的一个**扩域**. 这时，以 F 中的乘法为数乘，显然 F 可以看作 E 上的一个线性空间. 若 $\dim_E F < +\infty$，则称 F 是 E 的**有限扩域**.

显然，$\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的扩域，$\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{R}$ 的扩域，并且 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = +\infty, \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

一个需要考虑的问题是：在 F 是 E 的扩域时，域 E 上的线性空间与 F 上的线性空间之间是什么关系?

在这里，我们只对 $E = \mathbb{R}, F = \mathbb{C}$ 考虑上面的问题。

一般地, 对一个复线性空间 U, 由于 $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{C}$ 的子域, 若只考虑实数的数乘作用, 则可将 U 视作一个实线性空间. 特别地, 若 $\dim_{\mathbb{C}} U$ 有限, 则 $\dim_{\mathbb{R}} U = 2\dim_{\mathbb{C}} U$. 进一步地, 若 U 是酉空间, 内积记为 $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{C}}$, 则由定义容易直接验证

$$(x,y)_{\mathbb{R}} \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Re}(x,y)_{\mathbb{C}}, \quad \forall x,y \in U, \tag{1.13}$$

定义了实线性空间 U 上的一个内积, 从而 U 在 $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}}$ 下成为一个欧氏空间. 这个过程可以看作酉空间内积在实部分上的限制内积，也称为酉内积的**实化**.

设 V 是一个具有内积 $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}}$ 的欧氏空间. 一个重要的问题是: 如何得到一个具有内积 $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{C}}$ 的酉空间 U, 使得 V 是 U 作为实线性空间的子空间并且有

$$(u,v)_{\mathbb{R}} = (u,v)_{\mathbb{C}}, \quad \forall u,v \in V?$$

特别地, 上式表明 $(u,v)_{\mathbb{C}} \in \mathbb{R}$, 且 V 的内积即为 U 作为欧氏空间的内积 (1.13) 在 V 上的限制. 在此基础上, 欧氏空间 V 与酉空间 U 的结构之间关系如何? 现在我们就围绕这个问题展开.

一般地, 对实线性空间 V, 我们可以在加群 $V\times V$ 上定义如下复线性空间结构. 为了避免与内积符号混淆, 此处将 $V\times V$ 中元素记为 $u\times v$, 其中 $u,v\in V$. 对任意 $a+\mathrm{i}b\in\mathbb{C}$ 和 $u\times v\in V\times V$, 定义

$$(a+\mathrm{i}b)(u\times v) = (au-bv)\times(av+bu). \tag{1.14}$$

若在 $V\times V$ 中记 $u = u\times\mathbf{0}$, $\mathrm{i}v = \mathbf{0}\times v$, 则 $u\times v = u+\mathrm{i}v$, 因此有

$$V\times V = V+\mathrm{i}V = \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\{u+\mathrm{i}v \mid u,v\in V\}.$$

那么有加法

$$(u+\mathrm{i}v)+(u'+\mathrm{i}v') = (u+u')+\mathrm{i}(v+v'), \quad \forall u,u',v,v'\in V, \tag{1.15}$$

且 (1.14) 式中数乘可写为

$$(a+\mathrm{i}b)(u+\mathrm{i}v) = (au-bv)+\mathrm{i}(av+bu). \tag{1.16}$$

不难验证如下命题:

命题 1.4.1　设 V 是实线性空间, 那么 $V_{\mathbb{C}} \overset{\text{def}}{=} V + \mathrm{i}V$ 在加法 (1.15) 和数乘 (1.16) 下成为一个复线性空间.

上述复线性空间 $V_{\mathbb{C}}$ 称为实线性空间 V 的**复化**. 对 $w = u + \mathrm{i}v \in V_{\mathbb{C}}$, 其中 $u, v \in V$, 可以定义实部和虚部

$$\mathrm{Re}(w) = u \in V, \quad \mathrm{Im}(w) = v \in V.$$

显然 $V = \{\mathrm{Re}(w) \mid w \in V_{\mathbb{C}}\}$ 可视作 $V_{\mathbb{C}} = V + \mathrm{i}V$ 作为实线性空间的子空间.

例 1.4.1　若 $V = \mathbb{R}^n$, 则 $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$.

假设 V 是欧氏空间, 内积为 $(\cdot, \cdot)$. 对 $u + \mathrm{i}v, u' + \mathrm{i}v' \in V_{\mathbb{C}}$, 其中 $u, u', v, v' \in V$, 定义

$$(u + \mathrm{i}v, u' + \mathrm{i}v')_{\mathbb{C}} = (u, u') - (v, v') + \mathrm{i}(v, u') + \mathrm{i}(u, v').$$

那么可以验证 $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{C}}$ 是 $V_{\mathbb{C}}$ 上的内积, 并且显然有

$$(u, u')_{\mathbb{C}} = (u, u'), \quad \forall u, u' \in V.$$

此酉空间 $V_{\mathbb{C}}$ 称为欧氏空间 V 的复化. 下面我们从几个方面讨论复化的性质.

(一) 基的复化不变性

定理 1.4.1　若 V 是有限维欧氏空间, $V_{\mathbb{C}}$ 是其复化酉空间, 则 $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$, 且 V 的 (标准正交) 基也是 $V_{\mathbb{C}}$ 的 (标准正交) 基.

证明　设 $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是 V 的基. 那么显然

$$V_{\mathbb{C}} = V + \mathrm{i}V = \mathbb{R}\alpha_1 + \cdots + \mathbb{R}\alpha_n + \mathrm{i}\mathbb{R}\alpha_1 + \cdots + \mathrm{i}\mathbb{R}\alpha_n = \mathbb{C}\alpha_1 + \cdots + \mathbb{C}\alpha_n.$$

下面证明 α 在 $V_{\mathbb{C}}$ 中线性无关. 设 $c_j = a_j + \mathrm{i}b_j \in \mathbb{C}$, 其中 $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \cdots, n$ 使得

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j = \sum_{j=1}^{n} a_j \alpha_j + \mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} b_j \alpha_j = \mathbf{0}.$$

那么

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \alpha_j = \sum_{j=1}^{n} b_j \alpha_j = \mathbf{0}.$$

由于 α 在 V 中线性无关, 我们有 $a_j = b_j = 0$ 从而 $c_j = 0$, $j = 1, 2, \cdots, n$.

因此 α 是 $V_{\mathbb{C}}$ 的基. 由于 $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{C}}$ 限制到 V 上即为 $(\cdot, \cdot)$, 因此若 α 关于内积 $(\cdot, \cdot)$ 标准正交, 则关于内积 $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{C}}$ 也标准正交. □

(二) 实线性映射的复化与低维不变子空间

设 V 和 W 是实线性空间, $\varphi : V \to W$ 是线性映射. 定义 φ 的复化

$$\varphi_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}, \quad u + \mathrm{i}v \mapsto \varphi(u) + \mathrm{i}\varphi(v), \quad \forall u, v \in V.$$

显然 $\varphi_{\mathbb{C}}$ 是加群同态, 且对 $a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ 和 $u + \mathrm{i}v \in V_{\mathbb{C}}$ 有

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathbb{C}}\left((a+\mathrm{i}b)(u+\mathrm{i}v)\right) &= \varphi_{\mathbb{C}}\left((au-bv)+\mathrm{i}(av+bu)\right) \\
&= \varphi(au-bv)+\mathrm{i}\varphi(av+bu) \\
&= a\varphi(u)-b\varphi(v)+\mathrm{i}(a\varphi(v)+b\varphi(u)) \\
&= (a+\mathrm{i}b)(\varphi(u)+\mathrm{i}\varphi(v)) \\
&= (a+\mathrm{i}b)\varphi(u+\mathrm{i}v).
\end{aligned}$$

因此 $\varphi_{\mathbb{C}}$ 是复线性映射.

例 1.4.2 对 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 线性变换 $l_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$ 的复化是

$$(l_A)_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \quad x + \mathrm{i}y \mapsto Ax + \mathrm{i}Ay = A(x+\mathrm{i}y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

即将 A 视作复矩阵去左乘 $\mathbb{C}^n$ 中列向量.

下面的结论说明实线性变换的复化对应的矩阵是不变的.

定理 1.4.2 设 $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是实线性空间 V 的基, φ 是 V 上性变换. 设 A 是 φ 在基 α 下的矩阵. 视 α 为 $V_{\mathbb{C}}$ 的基, 则 $V_{\mathbb{C}}$ 上线性变换 $\varphi_{\mathbb{C}}$ 在 α 下的基仍为 A. 因此有特征多项式 $f_{\varphi}(\lambda) = f_{\varphi_{\mathbb{C}}}(\lambda) = |\lambda I_n - A|$.

证明 由定义有

$$\varphi_{\mathbb{C}}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A.$$

由此即得结论. □

由于有限维复线性空间上任意线性变换总有特征值, 其对应的特征子空间是这个线性变换的不变子空间. 而实多项式未必有实根, 因此有限维实线性空间上的线性变换未必有特征值. 但通过复化我们可以得到如下结论:

定理 1.4.3 有限维实线性空间 V 上的线性变换 φ 总有一维或二维不变子空间.

证明 由于 φ 的复化是复线性空间 $V_{\mathbb{C}}$ 上的线性变换, 存在特征值 $a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ 和对应的特征向量 $\mathbf{0} \neq u + \mathrm{i}v \in V_{\mathbb{C}}$, 其中 $u, v \in V$. 那么

$$\varphi_{\mathbb{C}}(u+\mathrm{i}v) = \varphi(u) + \mathrm{i}\varphi(v) = (a+\mathrm{i}b)(u+\mathrm{i}v) = (au-bv)+\mathrm{i}(av+bu).$$

那么 $\varphi(u) = au - bv$, $\varphi(v) = av + bu$. 这表明 $W = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{u, v\}$ 是 V 的 φ-不变子空间, 并且显然 $\dim W = 1$ 或 2. □

(三) 实线性变换复化的特征理论

对实线性空间 V 的复化 $V_{\mathbb{C}}$, 共轭映射

$$\bar{\cdot}: V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}, \quad w = u + \mathrm{i}v \mapsto \bar{w} \overset{\text{def}}{=} u - \mathrm{i}v, \quad \forall u, v \in V$$

显然是实线性同构, 并且有

$$\overline{cw} = \bar{c} \cdot \bar{w}, \quad \forall c \in \mathbb{C},\ w \in V_{\mathbb{C}}. \tag{1.17}$$

若 φ 是 V 上线性变换, 则由复化的定义有

$$\overline{\varphi_{\mathbb{C}}(w)} = \varphi_{\mathbb{C}}(\bar{w}), \quad \forall w \in V_{\mathbb{C}}. \tag{1.18}$$

定理 1.4.4 设 V 是有限维实线性空间, φ 是 V 上线性变换. 那么有

(i) $\lambda \in \mathbb{R}$ 是 $\varphi_{\mathbb{C}}$ 的特征值当且仅当 λ 是 φ 的特征值, 并且此时 $\varphi_{\mathbb{C}}$ 关于 λ 的特征子空间 $V_{\mathbb{C},\lambda}$ 恰好是 φ 关于 λ 的特征子空间 V_λ 的复化;

(ii) 若 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 是 $\varphi_{\mathbb{C}}$ 的特征值, 则 $\bar{\lambda}$ 亦然, 并且有

$$V_{\mathbb{C},\bar{\lambda}} = \overline{V_{\mathbb{C},\lambda}} \overset{\text{def}}{=} \{\bar{w} \mid w \in V_{\mathbb{C},\lambda}\}. \tag{1.19}$$

此时 V 的子空间

$$V_{\lambda,\bar{\lambda}} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathrm{Re}(w), \mathrm{Im}(w) \mid w \in V_{\mathbb{C},\lambda}\}$$

是 φ-不变的, 且其复化为 $V_{\mathbb{C},\lambda} \oplus V_{\mathbb{C},\bar{\lambda}}$.

证明 (i) 由定理 1.4.2 有特征多项式 $f_\varphi(\lambda) = f_{\varphi_{\mathbb{C}}}(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$, 因此 φ 的特征值即为 $\varphi_{\mathbb{C}}$ 的实特征值. 设 $\lambda \in \mathbb{R}$, $u + \mathrm{i}v \in V_{\mathbb{C}}$, 其中 $u, v \in V$. 那么

$$\varphi_{\mathbb{C}}(u + \mathrm{i}v) = \varphi(u) + \mathrm{i}\varphi(v) = \lambda(u + \mathrm{i}v) = \lambda u + \mathrm{i}\lambda v$$

当且仅当 $\varphi(u) = \lambda u$, $\varphi(v) = \lambda v$. 由此即得结论.

(ii) 实多项式 $f_{\varphi_{\mathbb{C}}}(\lambda)$ 的非实数复根总是共轭成对出现, 因此若 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 是 $\varphi_{\mathbb{C}}$ 的特征值, $\bar{\lambda}$ 亦然. 由 (1.17), (1.18) 两式, 对 $w \in V_{\mathbb{C}}$ 有

$$\varphi_{\mathbb{C}}(w) = \lambda w \quad \text{当且仅当} \quad \varphi_{\mathbb{C}}(\bar{w}) = \bar{\lambda} \cdot \bar{w},$$

由此即得 (1.19) 式.

由定理 1.4.3 的证明即知 $V_{\lambda,\bar{\lambda}}$ 是 φ-不变的, 而由 (1.19) 式知其复化为 $V_{\mathbb{C},\lambda} + V_{\mathbb{C},\bar{\lambda}}$. 关于不同特征值的特征向量线性无关, 故此和空间为直和. □

注 1.4.1 由于实多项式的非实数复根共轭成对出现, 奇数次实多项式必有实根, 因此奇数维实线性空间上的线性变换总有特征值.

例 1.4.3 定义线性变换 $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $(x_1,x_2,x_3)\mapsto(2x_1,x_2-x_3,x_2+x_3)$. 那么 φ 在 $\mathbb{R}^3$ 标准基 e_1,e_2,e_3 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

计算知 φ 仅有特征值 $\lambda=2$, 对应的特征子空间为

$$V=\{(a,0,0)\mid a\in\mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{R}^3$ 的复化为 $\mathbb{C}^3$. 由定理 1.4.1, e_1,e_2,e_3 也是复线性空间 $\mathbb{C}^3$ 的基. 由定理 1.4.2, $\varphi_{\mathbb{C}}$ 在此基下的矩阵也是 A. 那么 $\varphi_{\mathbb{C}}$ 有三个特征值 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1+\mathrm{i}$, $\lambda_3=1-\mathrm{i}$. 由定理 1.4.4, $\varphi_{\mathbb{C}}$ 关于 $\lambda_1=2$ 的特征子空间为

$$V_{\mathbb{C}}=\{(a,0,0)+\mathrm{i}(b,0,0)\mid a,b\in\mathbb{R}\}=\{(c,0,0)\mid c\in\mathbb{C}\}.$$

以上事实均是显然的或容易直接验证的.

习题 1.4

1. 设有实线性空间 V 上的线性变换 φ. 证明: 对于任意 $\lambda\in\mathbb{C}$, $m\in\mathbb{N}$, 如下等式成立:

$$\operatorname{Ker}(\varphi_{\mathbb{C}}-\overline{\lambda}\,\mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^m=\overline{\operatorname{Ker}(\varphi_{\mathbb{C}}-\lambda\,\mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^m}.$$

2. 设 φ,ψ 是实线性空间 V 上的线性变换, 证明:

$$(\varphi+\psi)_{\mathbb{C}}=\varphi_{\mathbb{C}}+\psi_{\mathbb{C}},\quad(\lambda\varphi)_{\mathbb{C}}=\lambda\varphi_{\mathbb{C}},\quad\lambda\in\mathbb{R}.$$

3. 设 φ 是实线性空间 V 上的线性变换, 证明: $\varphi_{\mathbb{C}}$ 可逆当且仅当 φ 可逆.

4. 设 φ 是实线性空间 V 上的线性变换且没有特征值. 证明: V 的每个 φ-不变子空间都是偶数维的.

5. 设 V 是实线性空间, 证明:

(i) 存在 V 上线性变换 φ 满足 $\varphi^2=-\mathrm{id}_V$ 当且仅当 V 是偶数维的;

(ii) 在 (i) 的条件下, 在 V 上定义复数的数乘为: 对 $a,b\in\mathbb{R}$, 定义 $(a+\mathrm{i}b)v=av+b\varphi(v)$. 那么, 在此复数数乘和 V 的加法下, V 成为一个复向量空间;

(iii) 由 (ii) 中给出的 V 作为复线性空间的维数是 V 作为实向量空间的维数的一半.

6. 设 φ 是 n 维实线性空间 V 上的线性变换, 满足 $\operatorname{Ker}\varphi^{n-2}\neq\operatorname{Ker}\varphi^{n-1}$. 证明: φ 最多有两个不同的特征值, 且 $\varphi_{\mathbb{C}}$ 的特征值都是实数.

7. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 作为复矩阵可对角化. 证明: 存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & a_1 & b_1 & & & & \\ & & & -b_1 & a_1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & a_s & b_s \\ & & & & & & -b_s & a_s \end{pmatrix},$$

其中 $r+2s=n$, 且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 和 $a_1 \pm \mathrm{i}b_1, \cdots, a_s \pm \mathrm{i}b_s$ 分别是 A 作为复矩阵的实特征值和非实数复特征值 (按重数计算).

8. 设 $\mathbb{C}^n$ 是酉空间, 定义映射

$$\psi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}, \quad (x_1+\mathrm{i}y_1, \cdots, x_n+\mathrm{i}y_n) \mapsto (x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n).$$

证明:

(i) 若将 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{R}^{2n}$ 都视作实线性空间, 则 ψ 是实线性双射;

(ii) 对 $v, w \in \mathbb{C}^n$, 我们有 $(\psi(v), \psi(w)) = \mathrm{Re}\,(v, w)$ (Re 表示实部);

(iii) 对 $v \in \mathbb{C}^n$, 我们有 $|\psi(v)| = |v|$.