第一章

预备知识

1.1　集合与映射

我们首先回忆集合论中一些基本概念和记号. 假设 A, B, X 为集合, x, y 为集合的元.

- $x \in A$: 若 x 为集合 A 的元;
- $x \notin A$: 若 x 不为集合 A 的元;
- $A \subset B$: 若 A 为 B 的子集, 即 $x \in A \Rightarrow x \in B$;
- $A = B$: 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 即 $x \in A \Leftrightarrow x \in B$;
- $A \supset B$: 若 $B \subset A$;
- $A \cap B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\}$;
- $A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\}$;
- $A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ 且 } y \in B\}$[①]. 称作$A$ **和** B **的 Descartes 积**;
- $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$;
- 若 $A \subset X$, $\complement_X A = X \setminus A$ (或 $\complement A$, A^c) 称作A **相对于** X **的补集**;
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ 称作 A 和 B 的**对称差**;
- $\mathcal{P}(X)$ (或 2^X) 为集合 X 所有子集构成的集合族, 称作 X 的**幂集**.

思考题　(Stone) 设 A, B, C 为集合. 证明 $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$. 若记 $\cap$ 为乘法, $\triangle$ 为加法, 则 $(\mathcal{P}(A), \cap, \triangle)$ 为一结合交换代数[②].

1.1.1　关系

定义 1.1　从 X 到 Y 的一个 (有序) **关系**是指 $X \times Y$ 的一个子集 R. 若 $(x, y) \in R$, 我们记作 xRy. 若 $X = Y$, 则称 R 为 X 上的关系.

例 1.1　设 $X = \{1, 2, 3, 4\}$. 若 R 为 X 上通常的关系 "$<$", 则 R 为序对 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$. 若 xRy 意味着 $x|y$ (即 x 可被 y 整除), 则 $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$.

定义 1.2　设 R 为从 X 到 Y 的关系, $A \subset X$, $B \subset Y$, 则称集合

$$R(A) = \{y \in Y : xRy \text{ 对某 } x \in A\}$$

---

① 注意, 这里我们定义 $A \times B$ 利用了所谓序对的概念. 采用 Kazimierz Kuratowski 的定义, 一个序对 $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

② Marshall Harvey Stone (1903—1989) 是美国数学家, 在实分析、泛函分析和拓扑以及 Boole 代数上有突出贡献. 包括泛函分析中的 Stone-Weierstrass 定理, 拓扑学上的 Stone-Čech 紧化等. 代表性专著有 *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis* (1932).

为 A 在 R 下的**像**; 称集合

$$R^{-1}(B)=\{x\in X: xRy \text{ 对某 } y\in B\}$$

为 B 在 R 下的**原像**.

注 1.1 设 R 为从 X 到 Y 的关系. 我们引入 R^{-1} 为从 Y 到 X 的关系:

$$yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy.$$

R^{-1} 称作关系 R 的**反关系**.

定义 1.3 设 R 为从 X 到 Y 的关系, 我们称集合

$$R^{-1}(Y)=\{x\in X: xRy \text{ 对某 } y\in Y\}$$

为 R 的**定义域**; 称集合

$$R(X)=\{y\in Y: xRy \text{ 对某 } x\in X\}$$

为 R 的**值域**.

例 1.2 设 X,Y 为非空集合, 称 $F: X\to Y$ 为一**映射**, 是指 F 可以看成一个从 X 到 Y 的关系, 满足以下条件:

(1) F 的定义域为 X;

(2) 若 xFy 且 xFz, 则 $y=z$.

我们的定义表明

(1) 任给 $x\in X$, 对至少一个 $y\in Y$ 使得 xFy;

(2) 对至多一个 $y\in Y$ 使得 xFy, 即 $F(\{x\}):=\{y\in Y:(x,y)\in F\}$ 为单点集.

此时这个唯一的使得 $F(\{x\})=\{y\}$ 的 $y\in Y$ 称作 x 在 F 下的像, 记作 $F(x)$. 关系 F 可以表示成

$$F=\{(x,y)\in X\times Y: y=F(x)\}.$$

若 $f(X)=Y$, f 称作**满射**. 若对 $x_1,x_2\in X$, $x_1\neq x_2$, $f(x_1)\neq f(x_2)$, f 称作**单射**. 若 f 既为单射亦为满射, f 称作**双射** (或**一一映射**). 若 f 为双射, 则可定义 f 的**逆映射** $f^{-1}: Y\to X$, 即任给 $y\in Y$, 记 $x=f^{-1}(y)$, 此时 $f(x)=y$. 若映射 $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$, 则对于 $x\in X$, $h(x)=g\circ f(x)=g(f(x))$ 定义了 f 与 g 的**复合映射** $h: X\to Z$.

例 1.3 设 X,Y 为非空集合, 若对任意 $x\in X$ 存在 Y 的非空子集 $F(x)$, 则称 $F: X\rightsquigarrow Y$ 为一**集值映射**. 最常见的集值映射包括映射 f 的 "逆"f^{-1}, 凸函数的次导数等. 这里我们将集值映射 F 理解成从 X 到 Y 的关系只需使得其定义域非空即可, 而无须例 1.2 中映射像为单点集的条件, 此时 $F(\{x\})$ 可能是多值的. 从这个角度, 集值映射也可以给出 "关系" 的定义.

例 1.4　集合 X 上的**偏序**是一类重要的关系. 设 X 为非空集合, X 上的关系 "$\leqslant$" 称作偏序, 是指

(1) 任给 $x \in X$, $x \leqslant x$ (自反性);

(2) 若 $x \leqslant y$, $y \leqslant z$, 则 $x \leqslant z$ (传递性);

(3) 若 $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant x$, 则 $x = y$ (反对称性).

例 1.5　设 X 为一非空集合, X 上的关系 R 称作**等价关系**, 是指

(1) xRx 对任意 $x \in X$ (自反性);

(2) 若 xRy, 则 yRx (对称性);

(3) 若 xRy 且 yRz, 则 xRz (传递性).

通常我们用 "$\sim$" 表示一个集合上的等价关系. 任一等价关系决定了一个等价类

$$[x] := \{y \in X : x \sim y\}.$$

由选择公理, 我们能保证在每个等价类 $[x]$ 可以选取一个代表元. 我们称集合

$$X/\sim := \{[x] : x \in X\} \subset \mathcal{P}(X)$$

为集合 X 关于等价关系 $\sim$ 的**商集**. $\pi : x \mapsto [x]$ 称作**商映射**.

思考题　非空集合 X 的一个**分划**是指 X 的一个子集族 $\mathcal{A}$ 满足

(1) 任意 $A \in \mathcal{A}$ 均非空;

(2) 任给 $A, B \in \mathcal{A}$, 若 $A \neq B$, 则 $A \cap B = \varnothing$;

(3) $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}} A = X$.

是否可以说 X 上的等价关系与 X 上的分划是一一对应的?

1.1.2　集合族 (列)

设 $\mathcal{A}$ 为一集合族, 我们通常需要一个公理: *存在一个集合 X 使得所有的 $A \in \mathcal{A}$ 均包含于 X*. 该公理允许定义集合的任意并集. 事实上, 假设 $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ 为一集合族 (即一个映射 $I \to \mathcal{P}(X)$), 定义 $\mathcal{A}$ 的并集为

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in X : x \in A_i \text{ 对某 } i \in I\}.$$

换句话说, 集合族 $\mathcal{A}$ 的并集为满足上面公理的集合 X 中*最小的*集合. 类似可以定义 $\mathcal{A}$ 的交集为

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in X : x \in A_i \text{ 对任意 } i \in I\}.$$

命题 1.1 (de Morgan 法则) 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为集合族, 则

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c, \qquad \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c.$$

接下来, 我们来讨论集合族的乘积. 设 $\mathcal{A}$ 为一集合族, $\{X_i\}_{i\in I}$ 包含于 $\mathcal{A}$, 即存在映射 $I\to\mathcal{A}$ 使得任给 $i\in I$ 其像为 X_i. 可以看出, 若设 $U=\bigcup\limits_{i\in I} X_i$, 则 $\{X_i\}_{i\in I}$ 的乘积由元 $(x_i)_{i\in I}$ 组成, 这里 $x_i\in U$ 且以 $i\in I$ 为标签. 换句话说, 它恰恰是由所有这样的映射 $f: I\to U$ 组成: 任给 $i\in I$, $f(i)\in X_i$. 记 $\{X_i\}_{i\in I}$ 的乘积为

$$\prod_{i\in I} X_i.$$

很明显 $\prod\limits_{i\in I} X_i$ 中两个元 (x_i) 和 (y_i) 相同当且仅当任给 $i\in I$, $x_i=y_i$. 称 x_i 为 (x_i) 的第 i 个坐标.

例 1.6 设 f 为 $[a,b]$ 上的实函数, 则

$$[a,b]=\bigcup_{n\geqslant 1}\{x\in[a,b]: |f(x)|<n\},$$

$$\{x\in[a,b]: |f(x)|>0\}=\bigcup_{n\geqslant 1}\left\{x\in[a,b]: |f(x)|>\frac{1}{n}\right\}.$$

注 1.2 若对某 $j\in I$, $X_j=\varnothing$, 很明显此时 $\prod\limits_{i\in I} X_i=\varnothing$. 由选择公理, 若每一 X_i 均非空, 则 $\prod\limits_{i\in I} X_i\neq\varnothing$. 此时, 映射 $\pi_i:(x_i)\mapsto x_i$, $i\in I$, 称作**从乘积 $\prod\limits_{i\in I} X_i$ 到 X_i 的投影**.

特别地, 如果对所有的 $i\in I$, X_i 是相同的, 记作 X, 则

$$\prod_{i\in I} X = X^I = \{f: I\to X\}.$$

1.1.3 偏序集 • 格 • 上、下极限

设 X 为一非空集合, "$\leqslant$" 为 X 上的偏序关系, 则 $(X,\leqslant)$ 称作**偏序集**.

例 1.7 设 X 为非空集合, X 上最自然的偏序结构是由幂集 $\mathcal{P}(X)$ 上集合包含关系所给出的, 即

$$A\leqslant B \iff A\subset B, \quad \forall A,B\in\mathcal{P}(X).$$

设 $\mathcal{X}$ 为 X 上实函数全体组成的集合. 在 $\mathcal{X}$ 上定义偏序关系

$$f \leqslant g \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leqslant g(x), \quad \forall x \in X.$$

对任意 $A \subset X$, 定义 A (相对于 X) 上的**特征函数**为 $\mathbf{1}_A : X \to \mathbb{R}$,

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

显然我们有

$$\mathbf{1}_A \leqslant \mathbf{1}_B \quad \Longleftrightarrow \quad A \leqslant B.$$

定义 1.4　设 $(X, \leqslant)$ 为偏序集, $A \subset X$.

(1) 若对任意 $y \in A$, $y \leqslant x$ 成立, 则 $x \in X$ 称作 A 在 X 中的**上界**.

(2) 若 $x \in A$ 使得任给 $y \in A$, $y \leqslant x$, 则称 x 为 A 的**最大元**.

(3) 若对 A 中元 x, 不存在 $y \in A$ 使得 $x < y$, 则称 x 为**极大**的, 即若 $x \leqslant y$, $y \in A$, 则 $y = x$.

(4) 对集合 A, 设 S 为所有 A 在 X 的上界的集合. 若 S 非空且存在 S 的最小元 z, 称 z 为 A 的**上确界**, 记作 $\sup A$. 若 A 为有限集, 如 $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 则记 $\sup A = x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n$.

(5) 类似地可以定义**下界**、**最小元**、**极小**以及**下确界** $\inf A$. 当 A 为有限集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 时, 记 $\inf A = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$.

(6) 若任给 $x, y \in X$, $x \vee y$ 和 $x \wedge y$ 均存在, 则称 X 为**一格**. $\vee$ 和 $\wedge$ 称作 X 上的格运算. 若任给 $A \subset X$, $\sup A$ 和 $\inf A$ 均存在, 则称 X 为**一完备格**.

例 1.8　回忆例 1.7.

(1) 若 $A, B \in \mathcal{P}(X)$, 则 $\sup\{A, B\} = A \vee B = A \cup B$, $\inf\{A, B\} = A \wedge B = A \cap B$. 特别地, 若考虑 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$[①], 则 $\sup\{A_n\} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\inf\{A_n\} = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

(2) 若 $X = \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$, 则 $\sup\{x, y\} = x \vee y = \max\{x, y\}$, $\inf\{x, y\} = x \wedge y = \min\{x, y\}$.

(3) 若 $f, g \in \mathcal{X}$, 则 $\sup\{f, g\} = f \vee g$, $\inf\{f, g\} = f \wedge g$. 其中 $f \vee g$ 与 $f \wedge g$ 如下定义:

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \quad x \in X.$$

① 本书中自然数集 $\mathbb{N}$ 不包含 0.

注 1.3 通过特征函数, 可以将集合的问题与集合上的函数问题联系起来. 设 $\mathcal{X}$ 为所有 X 到 $\mathbb{R}$ 的函数全体构成的向量空间, 对 $f,g\in\mathcal{X}$ 定义格运算

$$f\vee g=\max\{f,g\},\quad f\wedge g=\min\{f,g\},$$

则 $\mathcal{X}$ 为一 (向量) 格. 不难验证, 对 $A,B\subset X$,

$$\mathbf{1}_{A\cup B}=\mathbf{1}_{A\vee B}=\mathbf{1}_A\vee\mathbf{1}_B,\quad \mathbf{1}_{A\cap B}=\mathbf{1}_{A\wedge B}=\mathbf{1}_A\wedge\mathbf{1}_B,$$

建立了集合上的函数与集合之间的联系.

思考题 设 a,b,a_1,b_1,a_2,b_2 均为实数. 证明

(1) $a+b=(a\vee b)+(a\wedge b)$, $|a-b|=(a\vee b)-(a\wedge b)$. 从而 $a\vee b=[(a+b)+|a-b|]/2$, $a\wedge b=[(a+b)-|a-b|]/2$.

(2) $(a_1-b_1)\vee(a_2-b_2)=(a_1+b_2)\vee(a_2+b_1)-(b_1+b_2)$.

思考题 验证以下关于特征函数的基本性质:

(1) $\mathbf{1}_{A\cup B}=\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B-\mathbf{1}_{A\cap B}$;

(2) $\mathbf{1}_{A\cap B}=\mathbf{1}_A\cdot\mathbf{1}_B$;

(3) $\mathbf{1}_{A\setminus B}=\mathbf{1}_A(1-\mathbf{1}_B)$;

(4) $\mathbf{1}_{A\triangle B}=|\mathbf{1}_A-\mathbf{1}_B|$;

(5) $\mathbf{1}_{\limsup\limits_{k\to\infty}A_k}=\limsup\limits_{k\to\infty}\mathbf{1}_{A_k}$;

(6) $\mathbf{1}_{\liminf\limits_{k\to\infty}A_k}=\liminf\limits_{k\to\infty}\mathbf{1}_{A_k}$.

1.1.4 集合列的极限 (集)

定义 1.5 设 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为**单调递增**集合列, 即 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_k\subset\cdots$, 则称 $\{A_k\}$ 的**极限**为

$$\lim_{k\to\infty}A_k=\bigcup_{k\geqslant1}A_k.$$

类似地, 设 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为**单调递减**集合列, 即 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_k\supset\cdots$, 则称 $\{A_k\}$ 的**极限**为

$$\lim_{k\to\infty}A_k=\bigcap_{k\geqslant1}A_k.$$

注 1.4 我们知道幂集 2^X 上天然地存在由集合包含关系 "$\subset$" 决定的偏序关系, 所谓单调递增或递减的集合列为 2^X 中的全序子集族, 此时定义的 "极限" 实际上分别是该子集族的上确界和下确界. 事实上, 对任意集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$,

关于上述偏序,

$$\sup_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha, \quad \inf_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha.$$

这个角度无论对于理解集合列、数列还是函数列的上下极限概念都有一定帮助.

思考题　证明 $\sup\limits_{\alpha} A_\alpha = \inf\{B : B \supset A_\alpha, \forall\alpha\}$.

定义 1.6　设 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为集合列, 对任给 $k\in\mathbb{N}$, 定义

$$B_k = \bigcup_{i\geqslant k} A_i, \quad C_k = \bigcap_{i\geqslant k} A_i.$$

显然 $\{B_k\}$ 与 $\{C_k\}$ 分别单调递减和单调递增, 其极限均存在. 定义

$$\limsup_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} B_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} B_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{i\geqslant k} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i\geqslant k} A_i,$$

$$\liminf_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} C_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} C_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{i\geqslant k} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i\geqslant k} A_i,$$

分别为 $\{A_k\}$ 的**上限集**与**下限集**.

下面的事实很好地刻画了集合列的上、下限集.

定理 1.1　若 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为集合列, 则

$$\limsup_{k\to\infty} A_k = \{x : \text{任给 } k\in\mathbb{N}, \text{存在 } i\geqslant k, \text{使得 } x\in A_i\}; \tag{1.1}$$

$$\liminf_{k\to\infty} A_k = \{x : \text{存在 } k_0\in\mathbb{N}, \text{使得任给 } i\geqslant k_0, x\in A_i\}. \tag{1.2}$$

证明　我们仅证明第一个等式, 另一个等式类似. 事实上, 可由 $x\in\limsup\limits_{k\to\infty} A_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i\geqslant k} A_i \Leftrightarrow \forall k\in\mathbb{N}, x\in\bigcup\limits_{i\geqslant k} A_i \Leftrightarrow \forall k\in\mathbb{N}, \exists i\geqslant k, x\in A_i$ 得到. □

例 1.9　设 $f_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为实函数序列, 我们来刻画 $\{f_n\}$ 的不收敛点集

$$D = \{x\in\mathbb{R} : \text{当 } n\to\infty \text{ 时}, f_n(x) \not\to f(x)\}.$$

为此定义

$$E_{n,k} = \left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\right\}, \quad k, n\in\mathbb{N}.$$

我们知道 $x\in D$, 即 $f_n(x)\not\to f(x)$ 等价于存在 k_0 使得 x 属于无穷多个 E_{n,k_0}, 也就是

说, 存在 k_0 使得 $x \in \limsup\limits_{n\to\infty} E_{n,k_0}$. 这表明

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \limsup_{n\to\infty} E_{n,k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i\geqslant n} \left\{x : |f_i(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\right\}.$$

思考题 假设 $\mathbb{R}$ 上的实函数序列 $\{f_n\}$ 处处收敛于函数 f, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 证明, 对任意 $t \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leqslant t\} = \bigcap_{k\geqslant 1} \bigcup_{m\geqslant 1} \bigcap_{n\geqslant m} \left\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) < t + \frac{1}{k}\right\}.$$

1.1.5 对等 • 集合的基数

1. 对等

在集合论中, 集合元素的个数是一个基本问题.

定义 1.7 *若存在 $f : A \to B$ 为一双射, 则称集合 A 与 B* **对等**, *记作 $A \sim B$.*

对任意集合族 $\mathcal{A}$, 上述对等的概念给出了一个等价关系. 后面我们将要引入的所谓集合 A 的基数 (或者势) $\operatorname{card} A$ 可以看成 $\mathcal{A}$ 关于上述等价关系 $\sim$ 的一个等价分类. 稍后我们具体讨论这个概念.

例 1.10 我们先来考虑几个简单的例子.

(1) $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N} + 1$.

(2) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

定义函数 $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$f(i, j) = 2^{i-1}(2j - 1), \qquad (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

由算术基本定理 (即整数的唯一分解定理), 任给 $n \in \mathbb{N}$, n 有如下表示:

$$n = 2^p \cdot q, \qquad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, q \in 2\mathbb{N} + 1.$$

这表明 f 为满射. f 为单射易证.

(3) $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$.

定义函数 $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}, \quad x \in (-1, 1),$$

则 f 为所需的双射.

思考题 证明 $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2$.

设 X 和 Y 为非空集合. 存在 X 到 Y 的单射描述了关系 $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y$. 注意, 到这里我们并没有给出 $\operatorname{card} X$ 和 $\operatorname{card} Y$ 的具体含义, 后面称之为集合 X 和 Y 的基

数. 容易看出, 关系 “$\leqslant$” 满足自反性和传递性. 事实上, 我们将证明这一关系还满足反对称性, 从而给出基数的一个偏序关系.

定理 1.2 (Schröder-Bernstein)　设 X 和 Y 为非空集合. 若 $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y$ 且 $\operatorname{card} Y \leqslant \operatorname{card} X$, 则存在 X 到 Y 的双射.

Kaplansky (1977)[29] 给出了上面定理的一些历史注记. 作者指出 (第 33 页), 定理 1.2 是 Cantor 错失的 (他渴望证明它), 后来由 Schröder 和 Bernstein 各自独立证明.

证明　我们首先断言: 设 $f : X \to Y$, $g : X \to Y$, 则存在分解

$$X = A \cup \tilde{A}, \quad Y = B \cup \tilde{B},$$

其中 $B = f(A)$, $\tilde{A} = g(\tilde{B})$, $A \cap \tilde{A} = \varnothing$, $B \cap \tilde{B} = \varnothing$.

事实上, 设

$$\mathscr{A} = \{E \subset X : E \cap g(Y \setminus f(E)) = \varnothing\}.$$

注意到至少 $\varnothing \in \mathscr{A}$. 令 $A = \bigcup\limits_{E \in \mathscr{A}} E$, 下面证明 $A \in \mathscr{A}$. 任给 $E \in \mathscr{A}$, $E \subset A$. 由于

$$E \cap g(Y \setminus f(E)) = \varnothing,$$

则 $E \cap g(Y \setminus f(A)) = \varnothing$, 从而

$$\begin{aligned} A \cap g(Y \setminus f(A)) &= \left(\bigcup_{E \in \mathscr{A}} E \right) \cap g(Y \setminus f(A)) \\ &= \bigcup_{E \in \mathscr{A}} (E \cap g(Y \setminus f(A)) = \varnothing. \end{aligned}$$

所以 $A \in \mathscr{A}$, 且 A 为 $\mathscr{A}$ 中的最大元.

令 $B = f(A)$, $\tilde{B} = Y \setminus B$, $\tilde{A} = g(\tilde{B})$, 容易验证

$$Y = B \cup \tilde{B}, \quad B \cap \tilde{B} = \varnothing.$$

下面证明余下的结论.

由于 $A \cap \tilde{A} = A \cap g(\tilde{B}) = A \cap g(Y \setminus B) = A \cap g(Y \setminus f(B)) = \varnothing$, 故 $A \cup \tilde{A} = X$. 不然, 存在 $x_0 \in X$, $x_0 \notin A \cup \tilde{A}$. 设 $A_0 = A \cup \{x_0\}$, 则

$$\varnothing = A \cap \tilde{A} = A \cap g(\tilde{B}) = A \cap g(Y \setminus f(A)) \supset A \cap g(Y \setminus f(A_0)),$$

这表明 $A \cap g(Y \setminus f(A_0)) = \varnothing$. 又

$$x_0 \notin A \cup \tilde{A} \Rightarrow x_0 \notin \tilde{A} \Rightarrow x_0 \notin g(Y \setminus f(A_0)),$$

故

$$\begin{aligned} A_0 \cap g(Y \setminus f(A_0)) &= (A \cup \{x_0\}) \cap g(Y \setminus f(A_0)) \\ &= A \cap g(Y \setminus f(A_0)) = \varnothing, \end{aligned}$$

即 $A_0 \in \mathscr{A}$, 这与 A 的极大性矛盾.

设 $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ 为单射, 则由断言, 存在分解

$$X = A \cup \tilde{A}, \quad Y = B \cup \tilde{B}, \quad B = f(A), \quad \tilde{A} = g(\tilde{B}).$$

注意到 $f|_A$ 及 $g|_{\tilde{B}}$ 均为双射, 因此定义

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g^{-1}(x), & x \in \tilde{A}, \end{cases} \qquad x \in X,$$

则 $F : X \to Y$ 为双射, 从而 $X \sim Y$. □

推论 1.3 *若 $C \subset A \subset B$ 且 $B \sim C$, 则 $B \sim A$.*

证明 由 $B \sim C$, 则存在单射 $f : B \to C \subset A$. 而包含映射为 A 到 B 的单射, 因此 $B \sim A$ 是定理 1.2的直接推论. □

例 1.11 $[-1, 1] \sim \mathbb{R}$. 这是因为

$$(-1, 1) \subset [-1, 1] \subset \mathbb{R},$$

例 1.10 (3) 表明 $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$, 故由定理 1.2, $[-1, 1] \sim \mathbb{R}$. 注意, 不可能找到连续函数建立这种对等关系.

2. 集合的基数 • 可数集

对每一个集合 A, 与之联系的一个概念是 A 的元个数, 记作 card A, 称作 A 的**基数** (或**势**). 例如若 $A = \{1, 2, \cdots, n\}$, 则 card A 为 A 的元素个数, 即此时 card $A = n$. 我们约定 card $\varnothing = 0$.

设 A, B 为集合, 若 $A \sim B$, 则称 A 与 B 具有相同的基数, 即 card $A =$ card B. 若存在 $f : A \to B$ 为单射, 即 A 与 B 的真子集 $f(A)$ 对等, 则称 card A 小于 card B, 记作 card $A <$ card B. 因此, Schröder-Bernstein 定理事实上是说: *若* card $A \leqslant$ card B *且* card $B \leqslant$ card A, *则* card $A =$ card B.

我们先来考虑一个简单情形. 若存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 A 与集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 对等, 集合 A 称作**有限集**. 此时 card $A = n$.

一个集合称作**无穷集** (或**无限集**), 若它不是有限集. 关于无穷集, 两个重要的例子是自然数集 $\mathbb{N}$ 与实数集 $\mathbb{R}$. 下面我们以这两个集合为基础展开讨论.

将 $\mathbb{N}$ 的基数 card $\mathbb{N}$ 记作 $\aleph_0$, 与 $\mathbb{N}$ 对等的集合称作**可数 (无穷) 集**. 显然若 A 为可数集, 则 card $A=\aleph_0$. 显然, 每一可数集 A 均可以写成如下形式:

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\},\quad a_i\in A,\ i\in\mathbb{N}.$$

命题 1.2　下面是可数集的一些基本性质:

(1) 无穷集中必包含可数集;

(2) 有限集与可数集之并为可数集;

(3) 可数个可数集之并为可数集;

(4) 可数集的有限直积为可数集.

证明　设 A 为任意无穷集, 则由数学归纳法很容易构造 A 的可数子集. 这表明 $\aleph_0$ 为无穷集中的最小的基数. 这就证明了 (1).

设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 为有限集, $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$ 为可数集, 定义 $f:\mathbb{N}\to A\cup B$,

$$F(k)=\begin{cases}a_k, & 1\leqslant k\leqslant n,\\ b_{k-n}, & k>n,\end{cases}\qquad k\in\mathbb{N}.$$

不难验证 F 为一双射. 这就证明了 (2).

设 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为可数集合列, 每一 A_n 均可数, $A=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n$. 不失一般性, 假设 A_n 两两互不相交. 设

$$A_n=\{a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nm},\cdots\},\quad n\in\mathbb{N},$$

则我们可以将 A 中元素排列如下:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & \cdots & a_{1m} & \cdots\\
 & \swarrow & & \swarrow & & & & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & \cdots & a_{2m} & \cdots\\
 & \swarrow & & & & & & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & \cdots & a_{3m} & \cdots\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
a_{n1} & & a_{n2} & & a_{n3} & \cdots & a_{nm} & \cdots\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

按照箭头所示, A 为可数集. 从而 (3) 成立.

设 $n\in\mathbb{N}$, 可数集的有限直积等价于 $\mathbb{N}^n$, 按照字典序即可证明 (4). □

例 1.12　我们先来看看几个简单的例子:

(1) 有理数集 $\mathbb{Q}$ 为可数集.

每一有理数均可表示成两个整数之商, 故存在单射 $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}^2$, 这表明 $\operatorname{card}\mathbb{Q}\leqslant\operatorname{card}\mathbb{Z}^2=\aleph_0$, 而 $\mathbb{N}\subset\mathbb{Q}$ 蕴涵了 $\aleph_0=\operatorname{card}\mathbb{N}\leqslant\operatorname{card}\mathbb{Q}$.

(2) $\mathbb{R}$ 中两两互不相交的开区间族至多可数.

因为这些开区间两两互不相交, 故不同区间中可选取互异的有理数.

(3) $\mathbb{R}$ 上单调函数的不连续点 (即间断点) 集至多可数.

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 单调递增, 则 f 的每一不连续点 x 对应一个开区间 $(f(x-),f(x+))$, 且两个不同的不连续点 x_1 和 x_2 相应的开区间不相交.

思考题 称非零整系数多项式的根为代数数, 证明代数数可数.

例 1.13 对 $\mathbb{R}$ 上的实函数 f, 集合

$$E=\{x\in\mathbb{R}:f\text{ 在 }x\text{ 处不连续但右极限 }f(x^+)\text{ 存在 }\}$$

至多可数.

证明 事实上, 记 $S=\{x\in\mathbb{R}:f(x^+)\text{ 存在 }\}$, 任给 $n\in\mathbb{N}$, 设

$$A_n=\{x\in\mathbb{R}:\text{ 存在 }\delta>0,\text{ 使得当 }x',x''\in(x-\delta,x+\delta)\text{ 时},|f(x')-f(x'')|<1/n\}.$$

显然 $\bigcap\limits_{n\geqslant1}A_n$ 为 f 的连续点集. 下面证明 $S\setminus A_n$ 可数.

固定 $n\in\mathbb{N}$, 对任给 $x\in S\setminus A_n$, 存在 $\delta>0$ 使得

$$|f(x')-f(x^+)|<\frac{1}{2n},\quad x'\in(x,x+\delta).$$

故若 $x',x''\in(x,x+\delta)$, $|f(x')-f(x'')|<1/n$. 这表明

$$(x,x+\delta)\subset A_n.$$

也就是说

(1) $S\setminus A_n$ 中的每一点 x 为某 $I_x=(x,x+\delta)$ 的左端点;

(2) $I_x\cap(S\setminus A_n)=\varnothing$;

(3) 若 $x_1,x_2\in S\setminus A_n$, $x_1\neq x_2$, 则 $I_{x_1}\cap I_{x_2}=\varnothing$.

因此 $\{I_x:x\in S\setminus A_n\}$ 可数, 从而 $S\setminus A_n$ 可数. 从而

$$E=S\setminus\left(\bigcap_{n\geqslant1}A_n\right)=\bigcup_{n\geqslant1}(S\setminus A_n)$$

可数. □

思考题 对 $\mathbb{R}$ 上的实函数 f, 集合 $E=\{x\in\mathbb{R}:\lim\limits_{y\to x}f(y)=+\infty\}$ 至多可数.

思考题 设 $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}=(a,b)\cap\mathbb{Q}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n$ 为收敛的正项级数, 定义

$$f(x)=\sum_{x>r_n}C_n,\quad x\in(a,b).\tag{1.3}$$

证明 f 为在无理数处连续而在有理数处不连续的单调递增函数. 而且 $f(r_n^+)-f(r_n^-)=C_n>0$.

思考题　设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 定义

$$\operatorname{argmin} f=\{x\in\mathbb{R}: f \text{ 在 } x \text{ 处取得 (局部) 极小值}\},$$

$$\operatorname{argmax} f=\{x\in\mathbb{R}: f \text{ 在 } x \text{ 处取得 (局部) 极大值}\}.$$

证明集合 $f(\operatorname{argmin} f)$ 与 $f(\operatorname{argmax} f)$ 均至多可数. 证明若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续且每一点均为 f 的极值点, 则 f 为常值函数. 进一步, 这个结论对 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 亦成立.

例 1.14　设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, 则集合

$$E=\{x:\ \text{左导数 } f'_-(x) \text{ 及右导数 } f'_+(x) \text{ 均存在 (包括 } \pm\infty) \text{ 但不相等}\}$$

至多可数.

证明　设 $A=\{x: f'_-(x)>f'_+(x)\}$, $B=\{x: f'_-(x)<f'_+(x)\}$, 则 $E=A\cup B$. 下面证明 A 至多可数.

任给 $x\in A$, 选取 $r_x\in\mathbb{Q}$ 使得 $f'_+(x)<r_x<f'_-(x)$, 及 $s_x,t_x\in\mathbb{Q}$ 使得

$$\begin{aligned} &a<s_x<t_x<b,\\ &\frac{f(y)-f(x)}{y-x}>r_x,\quad s_x<y<x,\\ &\frac{f(y)-f(x)}{y-x}<r_x,\quad x<y<t_x, \end{aligned}$$

即

$$f(y)-f(x)<r_x(y-x),\quad y\neq x,\ y\in(s_x,t_x).$$

定义映射 $\phi:A\to\mathbb{Q}^3$, $x\mapsto\phi(x)=(r_x,s_x,t_x)$. 下面证明 ϕ 为单射.

设 $x_1\neq x_2\in A$,

$$(r_{x_1},s_{x_1},t_{x_1})=\phi(x_1)=\phi(x_2)=(r_{x_2},s_{x_2},t_{x_2}),$$

则 $x_1,x_2\in(s_{x_1},t_{x_1})=(s_{x_2},t_{x_2})$, 于是

$$f(x_2)-f(x_1)<r_{x_1}(x_2-x_1),\quad f(x_1)-f(x_2)<r_{x_2}(x_1-x_2).$$

注意到 $r_{x_1}=r_{x_2}$, 两式相加得到 $0<0$, 矛盾.

ϕ 为单射表明, A 与 $\mathbb{Q}^3$ 的某子集对等, 从而至多可数. 类似的结论对 B 从而 E 成立. □

例 1.15　$\mathbb{R}$ 上凸 (凹) 函数的不可微点至多可数.

证明 以凸函数为例, 这个结论依据这样的事实: $\mathbb{R}^n$ 上的凸函数 (单边) 方向导数存在. 事实上, 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为凸函数, 即

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\quad x,y\in\mathbb{R}^n,\ \lambda\in[0,1].$$

首先我们需要这样的事实: $\mathbb{R}^n$ 上的凸函数为局部 Lipschitz 的. 令

$$q(t)=\frac{f(x+ty)-f(x)}{t},\quad t>0,$$

则由 f 的凸性, 并注意到若 $t<t'$ 则 $x+ty=\left(1-\dfrac{t}{t'}\right)x+\dfrac{t}{t'}(x+t'y)$. 因此

$$f(x+ty)\leqslant(1-\frac{t}{t'})f(x)+\frac{t}{t'}f(x+t'y).$$

这表明 $q(t)$ 关于 t 单调递增. 而 f 的局部 Lipschitz 性保证了 $q(t)$ 在 $t=0$ 附近有界, 因此

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}=\lim_{t\to0^+}q(t)$$

存在. 故由例 1.14, 当 $n=1$ 时, f 的不可微点集至多可数. □

注意, 当 $n>1$ 时, 这个结论不成立. 不过由 Rademacher 定理, f 的局部 Lipschitz 性保证了 f 不可微点集为零测集.

思考题 证明若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为凸函数, 则 f 为局部 Lipschitz 的, 即任给 $x\in\mathbb{R}$, 存在 $r=r_x>0$ 以及常数 $M=M_x>0$, 使得

$$|f(y)-f(z)|\leqslant M|y-z|,\quad y,z\in B(x,r).$$

下面是关于基数的另一些性质.

命题 1.3 设 A 为无限集, $\operatorname{card}A=\alpha$, $\operatorname{card}B=\aleph_0$, 则 $\operatorname{card}A\cup B=\alpha$.

证明 不失一般性, 不妨设 $B=\{b_1,b_2,\cdots\}$, $A\cap B=\varnothing$, 且 $A=A_1\cup A_2$, $A_1=\{a_1,a_2,\cdots\}$. 定义 $f:A\cup B\to A$,

$$f(x)=\begin{cases}a_{2i}, & x=a_i\in A_1,\\ a_{2i-1}, & x=b_i\in B,\\ x, & x\in A_2.\end{cases}$$

则 f 为双射. □

命题 1.4 集合 A 为无限集的充分必要条件是 A 与其某真子集对等.

证明 若 A 为无限集, 取 B 为其有限子集, 则 $A\setminus B\subsetneqq A$, 且 $A\sim A\setminus B$. 若 A 为有限集, 则 A 不与其任一真子集对等. □

3. 不可数集

命题 1.5　$[0,1]$ 是不可数集.

证明　仅考虑 $(0,1]$, 则任给 $x\in(0,1]$ 均可表示成 (二进) 级数

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n},\quad a_n=0\text{ 或 }1.$$

注意, 如 $0.1000\cdots$ 与 $0.0111\cdots$ 是同一个数. 我们约定上述级数中 1 一定出现无穷次, 则 $(0,1]$ 与这样的全体二进制小数一一对应.

事实上, 不考虑 $a_n=0$ 的项, 则

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-n_i},$$

$\{n_i\}$ 为严格单调上升的自然数序列, 由下面的方法唯一决定

$$k_1=n_1,\ k_i=n_i-n_{i-1},\quad i=2,3,\cdots,$$

则 $\{k_i\}$ 唯一决定了 x. 记全体自然数序列的族为 $\mathscr{A}$, 则 $(0,1]\sim\mathscr{A}$.

假定 $\mathscr{A}$ 可数, 排列如下:

$$\begin{gathered}(k_1^1,k_2^1,\cdots,k_i^1,\cdots),\\(k_1^2,k_2^2,\cdots,k_i^2,\cdots),\\\cdots\\(k_1^j,k_2^j,\cdots,k_i^j,\cdots),\\\cdots\end{gathered}$$

则 $(k_1^1+1,k_2^2+1,\cdots,k_i^i+1,\cdots)$ 未排出. 不然存在 i 使得

$$(k_1^1+1,k_2^2+1,\cdots,k_i^i+1,\cdots)=(k_1^i,k_2^i,\cdots,k_i^i,\cdots),$$

从而 $k_i^i+1=k_i^i$. 矛盾.

这表明 $\mathscr{A}$ 不可数, 从而 $[0,1]$ 亦然. □

注 1.5　不难证明

$$\mathscr{A}\sim\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\sim\{0,1\}^{\mathbb{N}},\quad \operatorname{card}\mathscr{A}=\operatorname{card}[0,1]=\operatorname{card}\mathbb{R}.$$

这里 $\operatorname{card}\mathbb{R}$ 称作**连续统基数**, 记作 c 或 $\aleph_1=2^{\aleph_0}$. 这个例子表明

$$\aleph_0<2^{\aleph_0}=\aleph_1=c.$$

下面的问题是集合论的基本问题.

(1) $\aleph_0$ 与 c 之间是否还存在其他的基数? (承认 $\aleph_0$ 与 c 之间不存在其他基数的假设称作连续统假设.)

(2) 有无最大的基数?

命题 1.6 设 A 为非空集合, 则 A 与其幂集 2^A 不对等.

证明 反证法. 假设 $A \sim 2^A$, 即存在 $f : A \to 2^A$ 为双射, 定义

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\},$$

则存在 $y \in A$ 使得 $f(y) = B \in 2^A$.

(1) 若 $y \in B$, 则 $y \notin f(y) = B$;

(2) 若 $y \notin B$, 则 $y \in f(y) = B$.

矛盾. □

例 1.16 设 $\{A_k\}$ 满足 $\operatorname{card} A_k = c$, 则 $\operatorname{card}\left(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = c$. 事实上, 不妨设 $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $A_k \sim [k, k+1)$, 则

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \sim [1, +\infty) \sim \mathbb{R}.$$

例 1.17 设 $\{E_n\}$ 满足 $\operatorname{card} E_n = c$, 则

$$E = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) : x_n \in E_n, n \in \mathbb{N}\},$$

基数为 c, 即 $\operatorname{card}\left(\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = c$. 由前例, 可假定 E_n 为自然数数列形成的集合, 则 E 中元素可看成无穷矩阵

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_k^1 & \cdots \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_k^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_k^n & \cdots \end{pmatrix}.$$

记这个无穷矩阵的集合为 A, 则 $A \sim E$. 而若视 A 中元素为数列

$$(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_3^1, x_2^2, x_1^3, \cdots),$$

则 $A \sim E_n$. 故 $\operatorname{card} A = c$.

例 1.18 记 $C([a, b])$ 为 $[a, b]$ 上连续实函数全体构成的集合, 则

$$\operatorname{card} C([a, b]) = c.$$

$C([a,b])$ 中包含常值函数, 故 card $C([a,b]) \geqslant c$. 另一方面, 任给 $\phi \in C([a,b])$, 定义 $f : C([a,b]) \to 2^{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}$,

$$f(\phi) = \{(s,t) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} : s \in [a,b], t \leqslant \phi(s)\}.$$

则 f 为一单射. 事实上若 $\phi_1 \neq \phi_2$, 但 $f(\phi_1) = f(\phi_2)$, 注意到存在 x_0 使得 $\phi_1(x_0) < \phi_2(x_0)$, 则存在 $\delta > 0$ 使得任给 $s \in I_\delta = [x_0-\delta, x_0+\delta]$, $\phi_1(s) < \phi_2(s)$, 这与 $f(\phi_1) = f(\phi_2)$ 矛盾. 从而 card $C([a,b]) \leqslant 2^{\mathbb{Q}^2} = c$.

例 1.19　设 $E = A \cup B$, card $E = c$, 则 card $A = c$ 或 card $B = c$. 不妨设 $E = (0,1)\times(0,1)$, 令 $E_0 = \{(x_0, y) : 0 < y < 1\}$, 其中 $x_0 \in (0,1)$. 若 $A \supset E_0$, 则 card $A = c$, 否则任给 $x \in (0,1)$,

$$B \cap \{(x,y) : 0 < y < 1\} \neq \varnothing,$$

则 card $B = c$.

例 1.20　记 $\mathscr{F}$ 为 $[a,b]$ 上所有实函数的全体, 则 card $\mathscr{F} > c$. 首先 card $\mathscr{F} \geqslant c$. 因为 $\mathscr{F} \supset \{\mathbf{1}_A : A \subset [0,1]\}$. 从而 card $\mathscr{F} \geqslant 2^{[0,1]} = c$. 假设 card $\mathscr{F} = c$, $\mathscr{F} \sim [0,1]$. $\mathscr{F}$ 中的元可以表示成函数族 $\{f_t\}$, $f_t(\cdot) = F(t,\cdot)$, $t \in [0,1]$. 设 $g(x) = F(x,x) + 1$, 则 $g \in \mathscr{F}$, 从而存在 $\alpha \in [0,1]$, 使得

$$g(x) = f_\alpha(x).$$

因此 $F(x,x) + 1 = F(\alpha, x)$, $x \in [0,1]$. 取 $x = \alpha$, 矛盾.

事实上, $\mathscr{F}$ 即无穷乘积空间 $\mathbb{R}^{[a,b]}$, 从而 card $\mathscr{F} =$ card $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \aleph_2$.

1.2　拓扑学・度量空间

1.2.1　度量拓扑

定义 1.8　非空集合 X 上的**度量** (或**距离**) $d : X\times X \to \mathbb{R}$, 对任意 $x, y, z \in X$ 满足

(1) $d(x,y) \geqslant 0$, 且 $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;

(2) $d(x,y) = d(y,x)$;

(3) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

例 1.21　$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \cdots, n\}$ 为一 n 维实线性空间,

赋予内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$. 对 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i.$$

$(\mathbb{R}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 称作 **Euclid 空间**. $|x|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ 定义了 $\mathbb{R}^n$ 上的**模**. $d(x,y)=|x-y|$ 定义了 $\mathbb{R}^n$ 上的度量. 内积与模有下面的 Schwarz 不等式:

$$|\langle x,y\rangle|\leqslant|x|\cdot|y|,\quad x,y\in\mathbb{R}^n.$$

一个集合 X 上的所谓 "拓扑", 是指 X 上开集的全体. 对度量空间 (X,d), 首先采用下面比较直观的办法来定义开集.

定义 1.9 设 (X,d) 为度量空间.

(1) 设 $\delta>0$, $B(x,\delta)=\{y:d(x,y)<\delta\}$ 称作以 x 为中心, δ 为半径的**开球**. 类似地, $\bar{B}(x,\delta)=\{y:d(x,y)\leqslant\delta\}$ 称作以 x 为中心, δ 为半径的**闭球**.

(2) $E\subset X$, 若任给 $x\in E$, 存在 $\delta>0$, 使得 $B(x,\delta)\subset E$, 则 E 称作**开集**. 开集的补集称作**闭集**.

(3) $U\subset X$, 若存在 $\delta>0$, 使得 $B(x,\delta)\subset U$, 则 U 称作 $x\in X$ 的**邻域**. 若进一步 U 自身为 X 中的开 (闭) 集, 则称 U 为 x 的**开 (闭) 邻域**.

(4) 在没有特别申明的情况下, 在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 均采用这种拓扑. 例 1.21 定义的拓扑称作 $\mathbb{R}^n$ 上的**自然拓扑**.

定义 1.10 $\{x_k\}$ 为 X 中序列, $x\in X$. $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$, 若

$$\lim_{k\to\infty}d(x_k,x)=0.$$

所谓 $\varepsilon-N$ **语言**的表述是:

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\ \text{若 } k>N,\ x_k\in B(x,\varepsilon).\tag{1.4}$$

定义 1.11 设 $E\subset\mathbb{R}^n$. $x\in\mathbb{R}^n$ 称作 E 的**极限点**, 若存在 $x_k\subset E$, x_k 互异, $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$. 集合 E 极限点的全体称作 E 的**导集**, 记作 E'. $x\in E\setminus E'$ 称作**孤立点**.

从定义很容易看出

$$\begin{aligned}x\in E'\quad&\Leftrightarrow\quad\forall\delta>0,\ (B(x,\delta)\setminus\{x\})\cap E\neq\varnothing,\\ x\in E\setminus E'\quad&\Leftrightarrow\quad\exists\delta>0,\ (B(x,\delta)\setminus\{x\})\cap E=\varnothing.\end{aligned}\tag{1.5}$$

例 1.22 若 $E_1,E_2\subset\mathbb{R}^n$, 则 $(E_1\cup E_2)'=E_1'\cup E_2'$. 事实上, 一方面由于 $E_1,E_2\subset E_1\cup E_2$, 故 $E_1'\cup E_2'\subset(E_1\cup E_2)'$. 另一方面, 若 $x\in(E_1\cup E_2)'$, 存在 $E_1\cup E_2$ 中互异的点列 $\{x_k\}$, $x_k\to x$, 则必有子列 $\{x_{k_i}\}\subset E_1$ 或 E_2, 且 $x_{k_i}\to x$, $x\in E_1$ 或 E_2, 这表明 $(E_1\cup E_2)'\subset E_1'\cup E_2'$.

定理 1.4 (Bolzano-Weierstrass)　$\mathbb{R}^n$ 中的有界无穷集 E 必有极限点.

对于度量空间, 我们还需要一些非拓扑的概念.

定义 1.12　设 $E \subset X$,

$$\operatorname{diam} E = \sup\{d(x,y) : x, y \in E\}$$

称作 E 的**直径**. 若 $\operatorname{diam} E < \infty$, 则称 E 为**有界集**.

定义 1.13　$\{x_n\}$ 为 X 中序列, $\{x_n\}$ 称作 **Cauchy 序列** (或**基本列**), 若任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $k, l > N$ 时, $d(x_k, x_l) < \varepsilon$. 若 X 中的 Cauchy 列一定收敛于某 $x \in X$, 这个性质称作度量空间 (X, d) 的**完备性**.

思考题　我们称数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 X 上的函数 $|\cdot| : X \to [0, +\infty)$ 为一范数 (或模), 若满足对任意 $x, y \in X$, $r \in \mathbb{K}$, (1) $|x| = 0$ 当且仅当 $x = 0$; (2) $|rx| = |r| \cdot |x|$; (3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. 证明: 若 X 为有限维实线性空间, 则所有的范数等价, 即对任意两个范数 $|\cdot|_1$ 和 $|\cdot|_2$, 存在 $0 < C < 1$, 使得对任意 $x \in X$, $C|x|_1 \leqslant |x|_2 \leqslant C^{-1}|x|_1$. 进而证明, 所有有限维实线性空间的范数诱导的度量拓扑是相容的.

1.2.2　拓扑学的公理

不难验证, 若设 τ 为度量空间 (X, d) 中所有开子集构成的集合族, 则 τ 满足

O1) $\varnothing, X \in \tau$;

O2) 若 $U_i \in \tau$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则 $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$;

O3) 若 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 为 τ 中任意子集族, 则 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau$.

在拓扑学中, 我们通常将上述三条性质作为**拓扑**的定义. 显而易见, 对应 X 全体闭集构成的集合族 $\mathscr{F}$ 满足

C1) $\varnothing, X \in \mathscr{F}$;

C2) 若 $F_i \in \mathscr{F}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则 $\bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathscr{F}$;

C3) 若 $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 为 $\mathscr{F}$ 中任意子集族, 则 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathscr{F}$.

注 1.6　上面的 O1)—O3) 与 C1)—C3) 通常分别称作开集公理和闭集公理. 一个抽象的集合 X, 以及它的一个子集族 τ, 若 τ 满足 O1)—O3) 则 τ 称作 X 上的一个拓扑. (X, τ) 构成一拓扑空间. 若 (X, τ) 为一拓扑空间, $S \subset X$, 则 $\tau_S = \{U \cap S : U \in \tau\}$ 称作 S 的子空间拓扑.

在一个集合 X 中可以赋予不同的拓扑. 比如在泛函分析中, 经常会遇到一个函数空间可以有多个 (有意义的) 拓扑. 不同的拓扑决定了不同的极限或者说收敛的模式.

思考题 设 (X,τ) 为一拓扑空间, S 为 X 的非空子集. 定义 $\tau_S=\{U\cap S: U\in\tau\}$. 证明 (S,τ_S) 亦为一拓扑空间. (S,τ_S) 称作 (X,τ) 的拓扑子空间, τ_S 称作 X 关于子集 S 的子空间拓扑. 在同胚下保持不变的性质被称作拓扑性质. 若 X 的拓扑性质 S 同时具有, 称该拓扑性质 (即为同胚保持的性质) 为遗传的. 证明 $\mathbb{R}^n$ 的任意子集均遗传了可分性 (定义 1.17).

下面内容对理解 Euclid 空间上的拓扑有很大帮助. 我们用较为简洁的模式介绍一下其中一些必要的拓扑学知识.

定义 1.14 若 X 为集合, S 为其子集族, τ 为 X 上的一个拓扑. S 称作拓扑空间 (X,τ) 的**拓扑基**: 若任给 $U\in\tau$, 存在 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1}$, 使得 $U=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda_1}V_\lambda$, 即 τ 中元可由 S 中元之并生成. 拓扑基是一个全局概念. 若拓扑空间 (X,τ) 具有可数的拓扑基, 则 X 称作**第二可数**的.

思考题 记 $\mathcal{F}_1=\{B(x,r): x\in\mathbb{R}^n, r>0\}$, $\mathcal{F}_2=\{B(x,r): x\in\mathbb{Q}^n, r\in\mathbb{Q}\cap(0,+\infty)\}$, $\mathcal{F}_3=\left\{\prod\limits_{i=1}^n(a_i,b_i): a_i<b_i, a_i,b_i\in\mathbb{Q}, i=1,2,\cdots,n\right\}$. 证明 $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ 和 $\mathcal{F}_3$ 均为 $\mathbb{R}^n$ 自然拓扑 τ 的拓扑基, 从而 $(\mathbb{R}^n,\tau)$ 是第二可数的.

同样的道理, 我们也可以用局部的观点来看这个问题.

定义 1.15 设 (X,τ) 为一拓扑空间, 我们称 V 为 $x\in X$ 的一个**邻域**: 若存在 $U\in\tau$, $x\in U$, 使得 $U\subset V$. 若所有 x 的邻域均可由某含 x 的子集族 $\mathscr{N}$ 生成, 则称 $\mathscr{N}$ 为 τ 的关于 x 的一个**邻域基**. 这是拓扑的一个局部概念. (X,τ) 的每一点均有可数邻域基, 这一性质称作**第一可数**性质.

思考题 度量空间为第一可数.

定义 1.16 设 X 为拓扑空间.

(1) $S\subset X$, 包含 S 的最小闭集称作 S 的**闭包**, 记作 $\overline{S}$ 或 $\operatorname{cl}S$.

(2) 含于 S 的最大开集称作 S 的**内部**, 记作 $\overset{\circ}{S}$ 或 $\operatorname{int}S$.

(3) $\partial S=\overline{S}\setminus\overset{\circ}{S}$ 称作 S (拓扑意义下) 的**边界**.

以度量空间 (x,d) 为例. 设 $S\subset X$,

$$\overset{\circ}{S}=\{x\in S: \text{存在}\,\delta>0, \text{使得}\,B(x,\delta)\subset S\},$$

$$\overline{S}=\{x\in\mathbb{R}^n: \text{任给}\,\delta>0,\, B(x,\delta)\cap S\neq\varnothing\}.$$

因此 $\overline{S}=S\cup S'$. 不难看出, S 为开集当且仅当 $S=\overset{\circ}{S}$, S 为闭集当且仅当 $S=\overline{S}$.

定义 1.17 设 X 为拓扑空间.

(1) $S\subset X$, 若 $\overline{S}=X$, 则称 S 在 X 中**稠密**.

(2) $S_1 \subset S$, S 为闭集. 若 $\overline{S_1} = S$, 则称 S_1 在 S 中稠密.

(3) 若 $S_1, S_2 \subset X$ 且 $\overline{S_1} = \overline{S_2}$, 则称 S_1 在 S_2 中稠密或称 S_2 在 S_1 中稠密.

(4) 若 X 存在可数的稠密子集, 则称 X 为**可分**.

例 1.23　$\mathbb{R}$ 上的非空开集必可表示成可数个两两互不相交的开区间之并.

证明　设 $G \subset \mathbb{R}$ 为一开集, $x \in G$, 则存在 $y < x < z$ 使得开区间 $(y, x), (x, z) \subset G$. 设

$$a = \inf\{y : (y, x) \subset G\}, \quad b = \sup\{x : (x, z) \subset G\}.$$

显然 $a < b$ 且 a, b 可以分别为 $-\infty, +\infty$, 但若 $G \neq \mathbb{R}$, 则不可能同时有 $a = -\infty, b = +\infty$. 设 $I(x) = (a, b)$, 则 $I(x)$ 为包含 x 的开区间, $I(x) \subset G$, 并且 $b \notin G$. 事实上, 若 $b \in G$, 则存在 $r > 0$ 使得 $(b - r, b + r) \subset G$, 这与 b 的定义矛盾. 类似地 $a \notin G$.

容易验证: 若 $x, y \in G$, $x \neq y$, 则 $I(x) = I(y)$ 或 $I(x) \cap I(y) = \varnothing$. 考虑 $\{I(x)\}_{x \in G}$, 显然 G 为 $I(x)$ 两两互不相交之并. 由例 1.12(2), 其至多可数. □

例 1.24　考虑广义实数集$[-\infty, +\infty]$ 为实数集添上 $\pm\infty$ 两个元素. $[-\infty, +\infty]$ 继承了 $\mathbb{R}$ 上的序关系, 为一全序集. 此时对任意 $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, 可以定义如下四类区间 $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$ 和 $[a, b)$. 引入 $+\infty$ 和 $-\infty$ 的开邻域为 $(a, +\infty]$ 和 $[-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$. 这些集合与 $\mathbb{R}$ 中开集的全体一起构成一个 $[-\infty, +\infty]$ 上的拓扑. 因此形如 (a, b), $(a, +\infty]$ 和 $[-\infty, b)$ 的集合均为 $[-\infty, +\infty]$ 上的开集, 也均为开区间. 事实上, 关于这个拓扑 $[-\infty, +\infty]$ 为一紧集, 是 $\mathbb{R}$ 的一个紧化. 由例 1.23, $[-\infty, +\infty]$ 上开集的结构为: $[-\infty, +\infty]$ 上的任一开集为至多可数个两两不交开区间之并.

例 1.25　设 $I_n = [0, 1 - 1/n]$ 为闭集列, 而 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n = [0, 1)$ 非闭集. 类似地, 设 $J_n = (-1/n, 1)$ 为开集列, 而 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n = [0, 1)$ 非开集.

定义 1.18　设 (X, τ) 为拓扑空间.

(1) 子集族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 称作 X 的**开覆盖**: 若任给 $\lambda \in \Lambda$, $U_\lambda \in \tau$, 且 $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = X$.

(2) X 称作**紧集**, 若 X 的任意开覆盖 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 存在有限的子覆盖. 换句话说, 存在有限的 $U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \cdots, U_{\lambda_N}$ 使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{N} U_{\lambda_i} = X$.

(3) 若 X 的每一点局部都存在紧邻域, 则称 X 为**局部紧**.

运用子空间拓扑, 对于子集 $E \subset X$, 若 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 为 X 中的开集族, 且

$$E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda,$$

则称 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 为 E 的开覆盖. 类似地, 若集合 E 任意开覆盖存在有限的子覆盖, 则称

E 为紧集.

对于度量空间, 一个与紧性密切相关的概念是:

定义 1.19 度量空间 (X,d) 称作**完全有界**: 若任给 $\varepsilon>0$, 存在 X 的有限子集 A 使得

$$d_A(x)=\inf_{y\in A} d(x,y)<\varepsilon,\qquad \forall x\in X.$$

有时 (X,d) 完全有界也称作 X 有**有限 ε-网**[①].

定理 1.5 我们有下面关于紧性的刻画:

(1) $\mathbb{R}^n$ 中的点集 E 为紧集当且仅当 E 为有界闭集.

(2) 度量空间 X 为紧当且仅当 X 完备且完全有界.

证明 证明留作习题. □

在分析学中, 除去这里介绍的紧性, 还有很多与紧性相关的概念. 比较常见的如序列紧性, 仿紧性等.

定理 1.6 $\mathbb{R}^n$ 中的点集 E 为紧集当且仅当 E 为闭集且序列紧, 即任给 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset E$, 必存在 $\{x_k\}$ 的收敛子列收敛于 E 中点.

定义 1.20 设 X 为拓扑空间.

(1) X 称作 **Hausdorff**: 若对任意 $x_1,x_2\in X$, $x_1\neq x_2$, 存在 U_1,U_2 分别为 x_1 和 x_2 的开邻域, 且 $U_1\cap U_2=\varnothing$.

(2) X 称作**正则**: 若对任意 $x\in X$ 和闭集 $F\subset X$, $x\notin F$, 存在 U_1、U_2 分别为 x 和 F 的开邻域, 且 $U_1\cap U_2=\varnothing$.

(3) X 称作**正规**: 若对任意闭集 $F_1\subset X$ 和 $F_2\subset X$, $F_1\cap F_2=\varnothing$, 存在 U_1、U_2 分别为 F_1 和 F_2 的开邻域, 且 $U_1\cap U_2=\varnothing$.

(4) X 称作**完全正则**: 若对任意 $x\in X$ 和闭集 $F\subset X$, $x\notin F$, 存在连续函数 $f:X\to[0,1]$ 使得 $f(x)=0$ 且 $f|_F=1$.

在拓扑学中, 上述定义中的拓扑性质是所谓分离公理. 因为 Hausdorff 蕴涵了单点集为闭集这一结论[②], 因此正规强于正则, 正则强于 Hausdorff. 这三者有时也分别称作 T_4、T_3 和 T_2 分离公理. 关于完全正则 (或 $T_{3\frac{1}{2}}$) 分离公理相关的 Urysohn 引理我们将在后面对于度量空间进行讨论. 一般拓扑空间 X, Urysohn 引理表明, 若 X 为 Hausdorff, 则正规等价于完全正则[16,Theorem 4.1].

我们知道 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 或者一般的有限维光滑流形都是局部紧 Hausdorff 空间. 一般度量空间都是 Hausdorff 的. 但是在泛函分析中, Riesz 定理说明一个赋范线性空间为局部紧当且仅当它是有限维.

---

① 有限 ε-网是指对于度量空间 X 中某有限子集 A, 以 A 中元素为中心的 ε-球覆盖了 X.

② 单点集为闭集这一结论实际上比 Hausdorff 性质要弱. 拓扑学上前者等价于所谓 T_1 分离公理.

1. 连续性

定义 1.21　设 (X,τ_X), (Y,τ_Y) 为拓扑空间.

(1) 映射 $f:X\to Y$ 称作**连续**: 若任给 $U\in\tau_Y$, $f^{-1}(U)\in\tau_X$. 简单地说, 开集的原像是开集.

(2) 映射 $f:X\to Y$ 称作**在 $x\in X$ 处连续**: 若任给 $f(x)$ 的邻域 $U\subset Y$, $f^{-1}(U)$ 为 x 的邻域. 简单地说, 邻域的原像是邻域.

我们比较一下这里引入的概念与数学分析中相应概念之间的联系:

(1) 不难看出, 映射 $f:X\to Y$ 连续当且仅当 $f:X\to Y$ 在每一点 $x\in X$ 处连续.

(2) 若 (X,d_X) 和 (Y,d_Y) 为度量空间, 映射 $f:X\to Y$ 在 $x\in X$ 处连续当且仅当任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得若 $y\in B_X(x,\delta)$ 则 $f(y)\in B_Y(f(x),\varepsilon)$ (这种表述称作 ε–δ 语言). 事实上, 若 ε–δ 语言成立, 任给 $f(x)$ 的邻域 $U\subset Y$, 存在 $B_Y(f(x),\varepsilon)\subset U$, 从而 $f(B_X(x,\delta))\subset B_Y(f(x),\varepsilon)$. 因此 $B_X(x,\delta)\subset f^{-1}(B_Y(f(x),\varepsilon))\subset f^{-1}(U)$, 这说明 $f^{-1}(U)$ 为 x 的邻域. 相反的方向是平凡的.

(3) 若 (X,d) 为度量空间, $f:X\to\mathbb{R}$, 则 f 连续当且仅当任给 $a<b$, $f^{-1}((a,b))$ 是开集. 事实上, 任给 $G\subset\mathbb{R}$ 为非空开集, 则存在两两不交的至多可数的开区间列 $\{(a_k,b_k)\}$, 使得 $G=\bigcup\limits_k(a_k,b_k)$. 我们的结论由关系 $f^{-1}\left(\bigcup\limits_k(a_k,b_k)\right)=\bigcup\limits_k f^{-1}((a_k,b_k))$ 得到. 若 $f:X\to[-\infty,+\infty]$, 上面的讨论需要包括形如 $[-\infty,a)$、$(a,+\infty]$ 和 (a,b) 的区间.

(4) 下面利用序列的刻画也十分有用. 若 (X,d) 为度量空间, $f:X\to\mathbb{R}$, 则 f 在 $x\in X$ 处连续当且仅当任给 $x_k\to x$, $f(x_k)\to f(x)$ $(k\to\infty)$. 需要指出的是, 如果拓扑空间 X 不是第一可数的, 后者仅是前者的必要条件但未必充分.

(5) 若 (X,d) 为度量空间, $f:X\to\mathbb{R}$, 则 f 由其在任意稠密子集 S 上的值决定. 事实上, 若 $x\notin S$, 则由连续性 $f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)$, 其中 $\{x_k\}\subset S$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$.

思考题　若 (X,d) 为度量空间, $f:X\to\mathbb{R}$ 或 $[-\infty,+\infty]$, 证明 f 在 $x\in X$ 处连续当且仅当任给 $x_k\to x$, $f(x_k)\to f(x)$ $(k\to\infty)$.

对于实函数, 另一个十分重要的概念是函数的半连续性.

定义 1.22　设 (X,d) 为度量空间, $f:X\to[-\infty,+\infty]$, $x\in X$.

(1) f 称作**上半连续**: 若任给 $a\in\mathbb{R}$, $f^{-1}([-\infty,a))$ 为 X 中开集. f 称作**下半连续**: 若任给 $a\in\mathbb{R}$, $f^{-1}((a,+\infty])$ 为 X 中开集.

(2) f 称作**在 $x\in X$ 处上半连续**: 任给 $a\in\mathbb{R}$, 若 $f^{-1}([-\infty,a))$ 包含 x 则其包含 x 的一个邻域. f 称作**在 $x\in X$ 处下半连续**: 任给 $a\in\mathbb{R}$, 若 $f^{-1}((a,+\infty])$ 包含 x 则其包含 x 的一个邻域.

注 1.7 定义 1.22 中实际上蕴涵了当 $f(x)=\pm\infty$ 时半连续性的刻画. 以下半连续为例: 若 $f(x)=-\infty$, 则任给 $a\in\mathbb{R}$, $x\notin f^{-1}((a,+\infty])$, 此时 f 在 x 处下半连续; 若 $f(x)=+\infty$, 则任给 $a\in\mathbb{R}$, $x\in f^{-1}((a,+\infty])$ 且存在 $\delta>0$ 使得 $B(x,\delta)\subset f^{-1}((a,+\infty])$, 这表明 f 在 x 处下半连续当且仅当 $\lim\limits_{y\to x} f(x)=+\infty$.

我们罗列一些半连续函数的基本性质.

定理 1.7 设 (X,d) 为度量空间, $f,g,f_\lambda: X\to[-\infty,+\infty]$, λ 属于任意指标集 Λ.

(1) f (在一点 x 处) 下半连续当且仅当 $-f$ (在一点 x 处) 上半连续;

(2) f 下半连续当且仅当 f 在每一点 $x\in X$ 处下半连续;

(3) 若 f 在 $x\in X$ 处既为下半连续亦为上半连续, 则 f 在 x 处连续;

(4) $\{f_\lambda\}$ 均下半连续, 则 $\sup\limits_\lambda f_\lambda$ 亦下半连续;

(5) 下半连续函数的有限代数和亦为下半连续;

(6) 若 $F,U\subset X$, F 为闭集, U 为开集, 则 $\mathbf{1}_U$ 为下半连续, $\mathbf{1}_F$ 为上半连续.

证明 (1) 由定义直接得到. 假设在每一点 $x\in X$ 处下半连续, 任给 $a\in\mathbb{R}$, 则对任何 $x\in f^{-1}((a,+\infty])$, 存在 $B(x,\delta)\subset f^{-1}((a,+\infty])$, 故 $f^{-1}((a,+\infty])$ 为开集. 这就证明了 (2). 若 f 在 $x\in X$ 处既为下半连续亦为上半连续, 则任给 $a<b\in\mathbb{R}$, 对 $x\in f^{-1}((a,b))=f^{-1}((a,+\infty])\cap f^{-1}([-\infty,b))$, 则存在 $B(x,\delta_1)\subset f^{-1}((a,+\infty])$ 和 $B(x,\delta_2)\subset f^{-1}([-\infty,b))$. 令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$, 则 $B(x,\delta)\subset f^{-1}((a,b))$. 一般情形由 f^{-1} 对并的运算保持性质得到. 最后, 由注 1.7 和 (1), 当 $f(x)=\pm\infty$ 时 f 在 x 处连续, 这就证明了 (3). 结论 (4) 由关系

$$\{\sup_\lambda f_\lambda>a\}=\bigcup_\lambda\{f_\lambda>a\}$$

得到. 现在, 假设 f,g 下半连续, 则由恒等式

$$\{f+g>a\}=\bigcup_{a_1+a_2=a}(\{f>a_1\}\cap\{g>a_2\})$$

直接得到结论 (5). 结论 (6) 由定义即可得到. □

思考题 证明 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 下半连续当且仅当 f 的上图 $E(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}: y\geqslant f(x)\}$ 为闭集.

思考题 证明 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为开集当且仅当 $\mathbf{1}_E$ 下半连续.

在 Darboux-Riemann 积分等很多应用中, 需要知道一个实函数上方最小的上半连续函数和下方最大的下半连续函数. 为此需要引入上下半连续包函数的概念.

定义 1.23　设 (X,d) 为度量空间, $f:X\to[-\infty,+\infty]$. 定义

$$\liminf_{y\to x} f(y)=\sup_{\delta>0}\inf_{y\in B(x,\delta)} f(y),\quad \limsup_{y\to x} f(y)=\inf_{\delta>0}\sup_{y\in B(x,\delta)} f(y).$$

$\underline{f}=\liminf\limits_{y\to x} f$ 和 $\overline{f}=\limsup\limits_{y\to x} f$ 分别称作 f 的**下半连续包**和**上半连续包**.

下面是上下连续包函数的一些基本性质.

定理 1.8　设 (X,d) 为度量空间, $f,g:X\to[-\infty,+\infty]$, 则

(1) $\underline{f}\leqslant f\leqslant\overline{f}$, $\underline{f}$ 下半连续, $\overline{f}$ 上半连续;

(2) f 在 $x\in X$ 处下半连续当且仅当 $\underline{f}(x)\geqslant f(x)$;

(3) 若 g 下半连续且 $g\leqslant f$, 则 $g\leqslant\underline{f}$.

证明　(1) 的第一个结论直接由定义得到. 下面证明 $\underline{f}$ 下半连续. 设 $\phi(\delta,x)=\inf\limits_{B(x,\delta)} f(y)$, 则 $\underline{f}(x)=\sup\limits_{\delta>0}\phi(\delta,x)$. 任给 $a\in\mathbb{R}$, 不失一般性, 假设 $E_a=\{\underline{f}>a\}$ 非空. 任给 $x_0\in E_a$, 则存在 $\delta>0$ 使得 $\phi(\delta,x_0)>a$, 从而对 $x\in B(x_0,\delta)$, $f(x)>a$. 任给 $x\in B(x_0,\delta/2)$, 因为 $B(x,\delta/2)\subset B(x_0,\delta)$, 故 $\phi(x,\delta/2)>a$. 这表明 $\underline{f}(x)>a$, 所以 $B(x,\delta/2)\subset E_a$, E_a 为开集. 这就证明了 $\underline{f}$ 下半连续. $\overline{f}$ 的情形类似可证.

由 (1) 和 (2) 仅需证明若 f 在 $x\in X$ 处下半连续, 则 $\underline{f}(x)\geqslant f(x)$. 假设 $a\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x)>a$, 即 $x\in E_a$, 则存在 $B(x,\delta)\subset E_a$. 因此 $\phi(x,\delta)\geqslant a$, 从而 $\underline{f}(x)\geqslant a$, 这表明 $\underline{f}(x)\geqslant f(x)$.

若 g 下半连续且 $g\leqslant f$, 由 (1) 和 (2), $g=\underline{g}\leqslant\underline{f}\leqslant f$. 这证明了 (3). □

上面定理 1.8(2) 另一种常见表述是: 设 (X,d) 为度量空间, $f:X\to\mathbb{R}$ 为下半连续当且仅当任给 $x\in X$ 以及序列 $\{x_k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$,

$$\liminf_{k\to\infty} f(x_k)\geqslant f(x).$$

下面的定理是变分法与最优控制以及其他各种类型优化问题中极小元存在的理论基础. 其实在很多实际应用中, 并不限于度量拓扑下的下半连续性.

定理 1.9　下半连续函数在紧集上取得最小值.

证明　设 $K\subset X$ 为一紧集. 由注 1.7和定理 1.7(1), 不失一般性, 假设 $f(x)>-\infty$, $x\in K$ 且 f 在 K 上不恒为 $+\infty$. 由 f 的下半连续性, $K\subset\bigcup\limits_{a\in\mathbb{R}}\{f>a\}$ 为一开覆盖, 故存在 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 使得 $K\subset\bigcup\limits_{i=1}^{N}\{f>a_i\}$. 取 $a_0=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_N\}$, 则 $K\subset\{f>a_0\}$. 因此 $\inf\limits_{x\in K} f(x)\geqslant a_0>-\infty$. 设存在 $\{x_k\}\subset K$ 为极小序列, 即 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)=\inf\limits_{x\in K} f(x)$. 由 K 的紧性, 假设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=z\in K$. 则

$$\inf_{x\in K} f(x)=\lim_{k\to\infty} f(x_k)=\liminf_{k\to\infty} f(x_k)\geqslant\underline{f}(z)\geqslant f(z)\geqslant\inf_{x\in K} f(x),$$

因此 f 在 $z\in K$ 处取得最小值. □

2. Urysohn 引理

在度量空间中, 一些深刻的拓扑学结论会变得易于处理, 技术上通常依赖所谓距离函数.

定义 1.24 设 (X,d) 为度量空间, $S\subset X$, 关于 S 的**距离函数**为

$$d_S(x)=\inf\{d(x,y):y\in S\},\qquad x\in X.$$

命题 1.7 设 (X,d) 为度量空间, $S\subset X$, 则

(1) $x\in\overline{S}$ 当且仅当 $d_S(x)=0$;

(2) 函数 d_S 为 Lipschitz 常数为 1 的 Lipschitz 函数.

证明 若 $x\in\overline{S}$, 则存在 S 中序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x. 故 $d_S(x)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$. 反之, 若 $d_S(x)=0$, 则存在序列 $\{x_n\}\subset S$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$, 这说明 $x\in\overline{S}$. 这证明了 (1).

为证明 (2), 只需证明

$$d_S(x)-d_S(y)\leqslant d(x,y),\qquad\forall x,y\in X.$$

设 $x,y\in X$, 任给 $\varepsilon>0$, 存在 y_ε 使得 $d(y,y_\varepsilon)<d_S(y)+\varepsilon$. 故

$$d_S(x)-d_S(y)\leqslant d(x,y_\varepsilon)-d(y,y_\varepsilon)+\varepsilon\leqslant d(x,y)+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性, 得证. □

注 1.8 若 X 为 Euclid 空间, $S\subset\mathbb{R}^n$ 为闭集, 则 d_S 为 Hamilton-Jacobi 方程

$$\begin{cases}|Dd_S(x)|=1, & x\in\mathbb{R}^n\setminus S,\\ d_S(x)=0, & x\in S\end{cases}$$

的一种弱解, 称作**粘性解**. 这是偏微分方程 20 世纪 80 年代发展起来的重要理论, 与变分法最优控制、最优运输等学科具有密切联系.

定理 1.10 (Urysohn 引理) 设 (X,d) 为度量空间, A,B 为 X 的闭子集且 $A\cap B=\varnothing$. 则存在连续函数 $f:X\to[0,1]$ 使得 $f|_A\equiv0$, $f|_B\equiv1$.

证明 函数

$$f(x)=\frac{d_A(x)}{d_A(x)+d_B(x)},\qquad x\in X$$

为满足要求的连续函数. □

我们可以利用 Urysohn 引理证明一些基本的拓扑学结论.

思考题 (Tietze) 设 (X,d) 为度量空间, $Y\subset X$ 为闭子集, $f:Y\to\mathbb{R}$ 连续, 证明存在 f 从 Y 到 X 的连续扩张.

思考题 (单位分解) 设 K 为度量空间 X 的紧子集, $U_1,U_2,\cdots,U_n$ 为 K 的开覆盖, 则存在具有紧支集的连续函数 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 使得

$$0\leqslant\varphi_k\leqslant 1,\qquad \operatorname{supp}(\varphi_k)\subset U_k,\qquad k=1,2,\cdots,n,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)=1,\qquad x\in K.$$

Urysohn 引理将在本书中扮演重要角色. 我们来看看 Urysohn 引理告诉了哪些信息? 为表述简单, 引入一些记号. 设 $F\subset U$, 其中 F 为闭集, U 为开集,f 为 X 上的连续实函数.

(1) 记 $f\prec U$, 称作f **从属于** U, 若 f 的**支集**

$$\operatorname{supp}(f)=\overline{\{x\in X:f(x)\neq 0\}}\subset U.$$

(2) 记 $F\prec f$, 称作F **从属于** f, 若 $0\leqslant f\leqslant 1$ 且 $f|_F=1$.

因此 Urysohn 引理实际上是说: *若 X 为度量空间, A,B 为 X 的闭子集且 $A\cap B=\varnothing$, 则存在 X 上的连续函数 f 使得 $B\prec f\prec X\setminus A$.*

若 $F\subset U$, F 为闭集, U 为开集, 则有 $\mathbf{1}_F\leqslant\mathbf{1}_U$. 由 Urysohn 引理, 存在 X 上的连续函数 f, 使得

$$\mathbf{1}_F\leqslant f\leqslant\mathbf{1}_U.$$

注意, 函数 $\mathbf{1}_F$ 为上半连续, 而 $\mathbf{1}_U$ 为下半连续. 上述结果实际上是说: *对于上 (下) 半连续函数 $\mathbf{1}_F$ ($\mathbf{1}_U$), 存在单调递减 (递增) 连续函数序列收敛于 $\mathbf{1}_F$ ($\mathbf{1}_U$).* 我们也可以理解为: *上半连续函数 $\mathbf{1}_F$ 和下半连续函数 $\mathbf{1}_U$ 存在一个连续的插值函数.* 上述结论对于一般的半连续函数也是正确的 (参见本章末习题).

在本书中, 对于具有正则性的测度, 一个可测集 E 可以用一个闭紧或紧集 F 从内部逼近, 一个开集 U 从外部逼近, 即

$$F\subset E\subset U.$$

因此由 Urysohn 引理, 存在连续函数 f, 使得 $F\prec f\prec U$. 我们感兴趣的是特征函数 $\mathbf{1}_E$ 与 f 的误差比较. 它们积分意义下的误差跟集合 $U\setminus F$ 的大小有关. 相关的内容可参见后面 Luzin 定理以及 Vitali-Carathéodory 定理.

需要指出, 如果去掉度量空间的假设, 分析学里另一种常见形式的 Urysohn 引理有以下形式 (证明参见文献 [40] 第 39 页).

定理 1.11 (Urysohn 引理 (局部紧 Hausdorff 空间)) 设 X 为局部紧 Hausdorff 空间, $K \subset V \subset X$, K 为紧集, V 为开集. 则存在具有紧支集的连续函数 $f : X \to [0,1]$ 使得 $K \prec f \prec V$.

1.2.3 Baire 纲 • Cantor 集 • Lebesgue-Cantor 函数

1. Baire 纲与 Baire 定理

定义 1.25 假设 (X,τ) 为拓扑空间.

(1) $E \subset X$ 称作**无处稠密**: 若 $\overline{E}^c$ 为 X 的开、稠密子集 (简称开稠集);

(2) $E \subset X$ 称作 (Baire 意义下) **第一纲集**: 若 E 可以表示为可数无处稠密集之并;

(3) $E \subset X$ 称作**第二纲集**: 若 E 非第一纲集;

(4) $E \subset X$ 称作**剩余集**: 若 E 包含稠密 G_δ-集.

定理 1.12 (Baire) 设 (X,d) 为完备度量空间, 则 X 的任意可数开稠子集之交在 X 中稠密.

证明 设 $\{V_n\}$ 为 X 中一列开稠子集, 记 $V = \bigcap\limits_n V_n$. 只需证明: 任给开集 W, $W \cap V \neq \varnothing$. 我们将采用归纳法.

V_1 为开稠集, 故存在 $x_1 \in X$, $r_1 \in (0,1)$ 使得 $\overline{B}(x_1,r_1) \subset W \cap V_1$. 若对 $n \geqslant 2$, $x_{n-1} \in X$, $r_{n-1} \in \left(0, \dfrac{1}{n-1}\right)$ 已经选好. 因为 V_n 为开稠集, 故 $V_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}) \neq \varnothing$. 从而存在 $x_n \in X$, $r_1 > 0$ 使得

$$\overline{B}(x_n,r_n) \subset V_n \cap B(x_{n-1},r_{n-1}), \qquad 0 < r_n < \frac{1}{n}.$$

对序列 $\{x_n\}$, 若 $i,j > n$, 则 $x_i, x_j \in B(x_n,r_n)$, 故 $d(x_i,x_j) \leqslant 2r_n < \dfrac{2}{n}$. 这表明 $\{x_n\}$ 为 X 中 Cauchy 序列. 由 X 的完备性, 存在 $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in X$, 显然 $x \in W \cap (\cap V_n)$. □

推论 1.13 设 (X,d) 为完备度量空间, $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为一列无处稠密, 则集合

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n$$

内部空.

证明 易见 $E^c = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n^c$ 为可数开稠集之交, 从而为稠密子集, 故 E 内部为空. □

推论 1.13 的另一常见形式是: 设 (X,d) 为完备度量空间, 且 $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n$, 则必存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\operatorname{int}\overline{E}_{n_0}$ 非空.

例 1.26　设 $\{f_k\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上连续实函数序列, $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ 处处存在. 设

$$f(x)=\lim_{k\to\infty} f_k(x),\qquad \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

则 f 的不连续点集为第一纲集[①].

证明　设 ω_f 为 f 的振幅函数. 只需证明: 任给 $\varepsilon>0$, 集合

$$F=\{x:\omega_f(x)\geqslant 5\varepsilon\}$$

无处稠密. 注意到, 由习题 4, F 为闭集. 事实上, 定义

$$E_n=\bigcap_{i,j\geqslant n}\{x:|f_i(x)-f_j(x)|\leqslant\varepsilon\},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

则每一 E_n 均为闭集, $\{E_n\}$ 单调递增且 $\mathbb{R}^n=\bigcup\limits_{n\geqslant 1}E_n$. 对任意闭球 S, $S=\bigcup\limits_{n\geqslant 1}(E_n\cap S)$. 从而由 Baire 定理, 对某 $n\in\mathbb{N}$, $E_n\cap S$ 包含某开集 U, 也就是说

$$|f_i(x)-f_j(x)|\leqslant\varepsilon,\qquad \forall x\in U,\quad i,j\geqslant n.$$

取 $j=n$ 并令 $i\to\infty$, 则

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon,\qquad \forall x\in U.$$

由 f_n 的连续性, 任给 $z\in U$, 存在开球 $B(z)\subset U$, 使得

$$|f_n(x)-f_n(z)|\leqslant\varepsilon,\qquad \forall x\in B(z).$$

上面两个式子表明

$$|f(x)-f_n(z)|\leqslant 2\varepsilon,\qquad \forall x\in B(z).$$

从而 $\omega_f(z)\leqslant 4\varepsilon$. 这表明对任意闭球 S, 存在开集 U 使得 $U\subset S\cap F^c$. 这说明 F^c 为开稠集. □

思考题　设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的实函数, 证明 f 的不连续点集为第一纲集当且仅当 f 在 $\mathbb{R}$ 的某稠密子集上连续.

思考题　设 f 为 $[0,1]$ 上处处可微的实函数 (左、右端点处右、左导数分别存在), 试给出导函数 f' 不连续点集拓扑的刻画.

---

① 一个函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 称作 **Baire 函数**, 是指 f 为连续函数的点态收敛的极限.

注 1.9 在数学的一些分支中, 会遇到以下类型的问题: 一个命题 $P(f)$ 依赖的函数 f 属于某个函数空间, 但命题 $P(f)$ 仅对某些**典型**情形成立. 那么如何刻画所谓典型的概念呢? 如果这里的函数 f 仅仅依赖于有限个参数, 此时需要处理的只是一个特定基底的有限维函数空间. 这时候比较有效的方法是对这些参数引入**测度**, 理想的典型情形就是对于一个全测参数集上的函数 f, 命题 $P(f)$ 成立. 很不幸, 这种思路对于无穷维的参数空间是行不通的. 所以一般会这样使用下面拓扑意义下的描述: 若该命题对于某个特定函数空间剩余集上的 f 成立, 则称命题 $P(f)$ 在**通有**情形成立. 历史上第一个这种类型的命题是下面思考题中 Banach 关于处处不可微连续函数类的刻画.

思考题 对 $[0,1]$ 上所有连续实函数全体组成的线性空间 $C([0,1])$, 赋予范数

$$\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

证明, 所有 $[0,1]$ 上连续但处处不可微函数构成 $C([0,1])$ 中的剩余集.

思考题 设 (X,d) 为一完备度量空间且无孤立点, 则 X 中任意稠密 G_δ 集必不可数.

2. Cantor 集与 Lebesgue-Cantor 函数

我们来构造 $[0,1]$ 上的标准 Cantor 三分集. 如图 1.1, 在 $[0,1]$ 上挖去中间的一个开区间 $J_{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, 得到两个闭区间 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ 和 $\left[\frac{2}{3},1\right]$. 对这两个闭区间 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ 和 $\left[\frac{2}{3},1\right]$ 类似地挖去中间的两个开区间 $J_{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ 和 $J_{\frac{3}{4}} = \left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$, 余下四个闭区间: $\left[0,\frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]$ 和 $\left[\frac{8}{9},1\right]$. 以此类推, 得到一个集合

$$C = [0,1] \setminus \bigcup_{r\in\mathbb{D}} J_r, \tag{1.6}$$

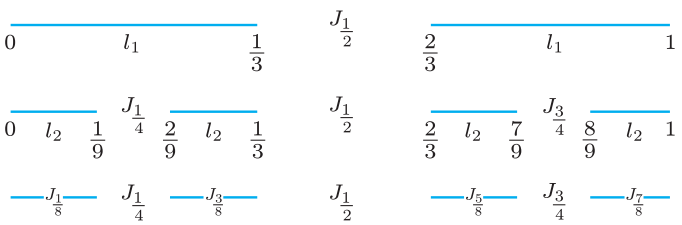

图 1.1 标准 Cantor 三分集的构造

其中 $\mathbb{D}$ 为 $[0,1]$ 上二进有理数的集合

$$\mathbb{D} = \left\{\frac{m}{2^k} : m,k\in\mathbb{N}, 1\leqslant m\leqslant 2^k\right\}.$$

为方便, 约定 $J_0=(-\infty,0)$, $J_1=(1,+\infty)$ 以及 $l_0=1$.

定义 1.26　式 (1.6) 中定义的集合 $C\subset[0,1]$ 称作 (标准) **Cantor 三分集**.

我们再来看 Cantor 集较为一般的构造, 这将方便后面对于 Cantor 集以及 Lebesgue-Cantor 函数的分析. 仿照上面的构造, 我们得到一个可数的开区间族 $\{J_r\}_{r\in\mathbb{D}}$. 设第 k 步挖去开区间得到 2^k 个闭区间的长度相同, 均为 l_k. 则序列 $\{l_k\}$ 必须满足:

$$1=l_0>2l_1>4l_2>\cdots>2^kl_k>\cdots.$$

在标准 Cantor 三分集中, $l_k=3^{-k}$. 直观上, 如果用记号 $m(C)$ 表示 Cantor 集 C 的大小, 显然有

$$m(C)=\lim_{k\to\infty}2^kl_k.$$

我们把这种更一般构造得到的集合也称作 **Cantor 集**. 下面讨论 Cantor 集 $C\subset[0,1]$ 的基本性质.

(1) C 为紧集. 因为构造中每一区间 J_r 均为开集, 故 C 为闭集. 显然 C 有界, 故为紧集.

(2) C 不可数. 我们先就标准 Cantor 集来说明这一点. 事实上, 任意 $x\in[0,1]$ 均有如下表示:

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{3^k},\qquad \alpha_k=0,1,2.$$

上述表示不是唯一的. $x\in C$ 当且仅当上述表示中 α_k 仅出现 0 或 2 (参见例 1.27), 从而可以建立 $x=\sum\dfrac{\alpha_k}{3^k}\in C$ 到 $y=\sum\dfrac{0.5\alpha_k}{2^k}\in[0,1]$ 的一个满射. 后面将给出另一个证明, 适用于一般的 Cantor 集.

(3) C 无处稠密且**完全不连通**[①]. 否则, $\operatorname{int}C$ 非空从而必包含一区间 J. 但根据构造, 对任意 k, 在第 k 步, C 必包含于某长度为 l_k 的闭区间, 这与 J 长度为正矛盾.

(4) $C=C'$. 由本章习题 6.

(5) 标准 Cantor 集 C 为零测集, 但存在正测 Cantor 集. 对标准 Cantor 集, $m(C)=\lim\limits_{k\to\infty}2^k3^{-k}=0$. 但是, 对任意 $\theta\in[0,1)$ 适当地选取构造过程中开区间列 $\{J_r\}_{r\in\mathbb{D}}$ 的大小, 可以构造出 Cantor 集 C 使得 $m(C)=\theta$.

例 1.27　任意 $x\in[0,1]$ 均有如下表示:

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{3^k},\qquad \alpha_k=0,1,2. \tag{1.7}$$

① 完全不连通空间是没有非平凡连通子集的拓扑空间. 在所有拓扑空间中空集和单点集合是连通的, 而在完全不连通空间中它们是仅有的连通子集.

这个表示并不是唯一的, 如 $\dfrac{1}{3}=0.1000\cdots=0.0222\cdots$. 我们记 $\Sigma_n=\{0,1\}^n$, 则对任意 $\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}\in\Sigma_n$, 其对应一个非退化闭区间

$$I_{w_1,w_2,\cdots,w_n}=[0.\eta_1\cdots\eta_n000\cdots,0.\eta_1\cdots\eta_n222\cdots],$$

其中 $\eta_i=2w_i$, $i=1,2,\cdots,n$. 注意到, 对于固定的 n, 这些 $\{I_{w_1,w_2,\cdots,w_n}\}$ 恰为 Cantor 集构造第 n 步余下的闭区间. 对任意 $\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}\in\Sigma_n$, 集合 $C\cap I_{w_1,w_2,\cdots,w_n}$ 中点的小数表示到第 n 位的截断恰为 $0.\eta_1\cdots\eta_n$. 故 $x\in C$ 当且仅当式 (1.7) 中 α_k 不出现 1.

我们观察到 Cantor 集构造中产生的开区间集 $\{J_r\}_{r\in\mathbb{D}}$ 可以赋予一个十分自然的序:

$$r<r' \quad\Leftrightarrow\quad J_r \text{ 在 } J_{r'} \text{ 左边}.$$

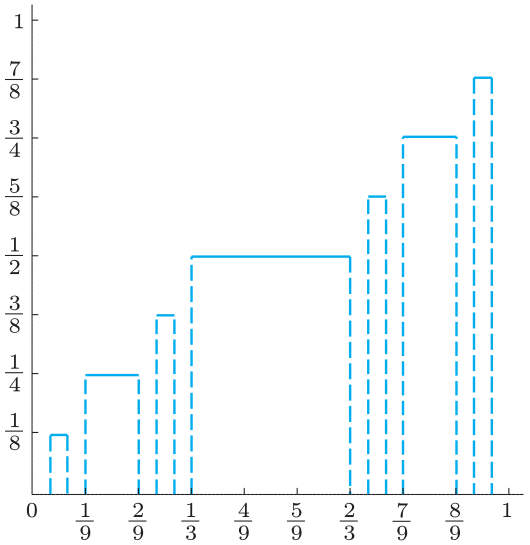

图 1.2 Lebesgue-Cantor 函数

我们将构造所谓关于 Cantor 集 C 的 Lebesgue-Cantor 函数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, 如图 1.2 所示. 首先给出 f 在集合 $\cup J_r$ 上的定义:

$$f(x)=r,\qquad x\in J_r,\ r\in\mathbb{D}\setminus(\{0\}\cup\{1\}).$$

已知 $\cup J_r$ 在 $[0,1]$ 中稠密. 由下面的思考题, 只需证明 f 在 $\cup J_r$ 上一致连续, 那么 f 存在从 $\cup J_r$ 到 $[0,1]$ 的 (唯一) 连续扩张.

思考题 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, $f:E\to\mathbb{R}$ 一致连续. 证明, 存在 f 从 E 到 $\overline{E}$ 的唯一连续扩张, 即存在唯一的连续函数 $g:\overline{E}\to\mathbb{R}$ 使得 $g|_E=f$.

下面来证明 f 在 $\cup J_r$ 的一致连续性. 先从一个特殊情形来看. 由 Cantor 集的构造, 若 $x\in\cup J_r$ 且 $|x-y|\leqslant l_3$, 则对二进有理数分母不超过 8 的 r, x 和 y 不能属于

两个不同的 J_r, 因此 $|f(x)-f(y)| \leqslant \dfrac{1}{8}$. 上述讨论实际上是一般的. 假设 $x, y \in \cup J_r$, $|x-y| \leqslant l_k$. 注意 Cantor 集构造过程的一步, 其局部结构如图 1.3 所示.

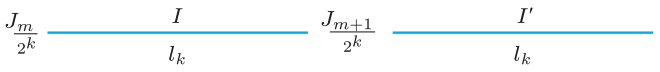

图 1.3　Cantor 集构造第 k 步的结构

根据 x, y 的位置, 有以下几种情况:

(1) $x \in I$, $y \in I$. 此时

$$|f(x)-f(y)| < \frac{m+1}{2^k} - \frac{m}{2^k} = \frac{1}{2^k}.$$

(2) $x \in I$, $y \in J_{\frac{m+1}{2^k}}$. 此时

$$|f(x)-f(y)| = \frac{m+1}{2^k} - f(x) < \frac{m+1}{2^k} - \frac{m}{2^k} = \frac{1}{2^k}.$$

(3) $x \in I$, $y \in I'$. 此时

$$|f(x)-f(y)| = f(y) - f(x) < \frac{m+2}{2^k} - \frac{m}{2^k} = \frac{2}{2^k}.$$

事实上, 由构造中的自相似性, 上面的估计可以改进为

$$|f(x)-f(y)| = f(y) - f(x) < \frac{1}{2^k}.$$

综上, 可得

$$\forall x, y \in \cup J_r,\ |x-y| \leqslant l_k \quad \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{1}{2^k}. \tag{1.8}$$

这就证明了 f 在 $\cup J_r$ 上的一致连续性.

定义 1.27　对于上述构造的 $\cup J_r$ 上的函数 f 在 $[0,1]$ 上的唯一连续扩张, 仍记作 f, 称作关于 Cantor 集 $[0,1] \setminus \cup J_r$ 的 **Lebesgue-Cantor 函数**.

注　1.10　进一步分析可以知道, (1.8) 中的一致连续性估计可以改进为 Hölder 估计. 设 $\theta = \log 2/\log 3$, 对标准 Cantor 三分集相关的 Lebesgue-Cantor 函数 f, 我们有

$$|f(x)-f(y)| \leqslant 2|x-y|^{\theta}, \qquad x, y \in [0,1].$$

事实上, 任给 $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$, 必存在最大的 k 使得 $|x-y| \leqslant 2^{-k}$, 即

$$3^{-(k+1)} < |x-y| \leqslant 3^{-k},$$

或者说

$$-k-1<\frac{\log|x-y|}{\log 3}\leqslant -k.$$

从而

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 2^{-k}<2^{1+\frac{\log|x-y|}{\log 3}}=2|x-y|^{\frac{\log 2}{\log 3}}.$$

我们来总结一下 Lebesgue-Cantor 函数的基本性质.

(1) 任给 $r\in\mathbb{D}$, $x\in J_r$, $f(x)=r$;

(2) f 单调递增;

(3) f 连续且满足: $\forall x,y\in[0,1]$, $|x-y|\leqslant l_k\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\dfrac{1}{2^k}$;

(4) f 为**魔鬼阶梯**, 这是在非线性数学和物理学中常见的现象;

(5) f 几乎建立了 Cantor 集 C 与 $[0,1]$ 的一一对应. 更确切地说: 设 B 为所有 J_r 的左端点, 则 $f:C\setminus B\to[0,1]$ 为双射. 因为 B 可数, 事实上这也证明了 C 不可数.

例 1.28 延续例 1.27 中的记号. 定义函数 $f:C\to[0,1]^2$, 其中 C 为标准 Cantor 三分集. 我们知道 C 中任意元具有小数表示 $0.\eta_1\cdots\eta_n\cdots$, 其中 $\eta_i=0$ 或 2. 定义

$$f(0.\eta_1\cdots\eta_n\cdots)=\left(0.\frac{\eta_1}{2}\frac{\eta_3}{2}\cdots\frac{\eta_{2n-1}}{2}\cdots,0.\frac{\eta_2}{2}\frac{\eta_4}{2}\cdots\frac{\eta_{2n}}{2}\cdots\right).$$

上式右端为二进制小数展开. 可以证明 $f:C\to[0,1]^2$ 是一个连续的满射, 并且可以扩张成 $f:[0,1]\to[0,1]^2$. 拓扑学上, 这样的曲线称作**填满空间的曲线**, 或 **Peano 曲线**[41].

思考题 标准 Cantor 三分集的 Lebesgue-Cantor 函数满足: $f(1-x)+f(x)=1$.

*3. 连续性模

定义 1.28

(1) 假设 $f:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 为一致连续映射, 则存在函数 $\omega_f:[0,+\infty]\to[0,+\infty]$ 满足 $\lim\limits_{r\to0^+}\omega_f(r)=0$, 使得

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant\omega_f(|h|),\qquad x\in E,|h|\ll 1.$$

我们称 ω_f 为一致连续函数 f 的**连续性模**.

(2) $f:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 称作 α-Hölder 连续 ($\alpha\in(0,1]$), 若 f 存在连续性模 $\omega_f(r)=Cr^\alpha$, 其中 $C>0$ 为常数. 若 $\alpha=1$, 则称 f 为 Lipschitz 函数.

(3) 设 $\mathcal{F}$ 为一族 $E\subset\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的一致连续函数, 若其中任意函数 $f\in\mathcal{F}$ 存在不依赖于 f 的连续性模 $\omega(r)$, 则称 $\mathcal{F}$ 为**等度连续**.

若 $f:E\to\mathbb{R}$ 一致连续, 则单调递增函数

$$\omega_f(r)=\sup\{|f(x)-f(y)|:|x-y|<r,x,y\in E\},\qquad r\geqslant 0,$$

给出了 f 的连续性模. 如果进一步假设存在 $a,b>0$ 使得

$$\omega_f(r)\leqslant ar+b,\qquad r\geqslant 0. \tag{1.9}$$

则可以寻求一个凹的连续性模. 事实上,

$$c_f(r)=\inf\{l(r):l\text{为仿射函数且满足}l\geqslant\omega_f\}$$

为所求的凹连续性模.

思考题　(Kirzbraun-Pucci 扩张定理) 假设 f 为 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的一致连续实函数, 其连续性模满足条件 (1.9). 证明 f 存在一连续扩张 $\tilde{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, 使得 $\tilde{f}$ 和 f 存在相同的凹连续性模 c_f, 并且

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\tilde{f}(x)=\sup_{x\in E}f(x),\qquad \inf_{x\in\mathbb{R}^n}\tilde{f}(x)=\inf_{x\in E}f(x).$$

对于 α-Hölder 连续函数和 Lipschitz 函数, 由于连续性模可以选成 Cr^α, 因此 α-Hölder 连续函数和 Lipschitz 函数不仅仅具有连续性这样的拓扑性质, 还有自然的度量性质. 简单来说, 如果 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 为 α-Hölder 连续函数, $\mathbb{R}^n$ 中两点 x 与 y 的距离 l, 则 $f(x)$ 和 $f(y)$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中距离不超过 Cl^α. 特别地, 当 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为双向 Lipschitz 同胚, 即 f 为一同胚, 且 f 和 f^{-1} 均为 Lipschitz 函数, 则 f 虽然不必为等距映射, 但它的像中两点距离与原像两点距离只相差一定的倍数. 这种性质在后面分析 Lebesgue 测度在 Lipschitz 映射下的变化是重要的. 同样, 对 α-Hölder 连续函数, 如 Lebesgue-Cantor 函数的这种度量性质也与分形几何有着明确联系. 这一点可以参考关于 Hausdorff 测度和 Hausdorff 维数的习题.

如果一族函数 $\mathcal{F}$ 均为 Lipschitz 函数, 并且可以找到共同的 Lipschitz 常数, 则称函数族 $\mathcal{F}$ 为等度 Lipschitz 的. 很容易看出, 等度 Lipschitz 函数族为等度连续的. 等度连续性是刻画连续函数族紧性 (Ascoli-Arzelà 定理) 的关键性质.

1.2.4　σ-代数 • Borel 集

定义 1.29　非空集合 X 的子集族 $\mathfrak{M}$ 称作一个 **σ-代数**, 是指下列条件成立:

(1) $X\in\mathfrak{M}$;

(2) 若 $A\in\mathfrak{M}$, 则 $A^c\in\mathfrak{M}$;

(3) 若 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathfrak{M}$, 则 $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}A_k\in\mathfrak{M}$.

例 1.29　下面是 σ-代数的一些例子.

(1) 任一非空集合 X 的幂集 $\mathscr{P}(X)$ 为一 σ-代数.

(2) 设 X 为一非空集合, 定义

$$\mathfrak{M}=\{A\subset X:A\text{至多可数或}A^c\text{至多可数}\}.$$

则 $\mathfrak{M}$ 为 X 上的 σ-代数. 事实上只需验证定义 1.29 (3). 设 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}$, 若每一 A_k 均至多可数, 则 $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$ 至多可数. 若存在 k_0 使得 $A_{k_0}^c$ 至多可数, 则 $\left(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)^c = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k^c \subset A_{k_0}^c$ 至多可数.

(3) 设 X, Y 为非空集合, $f: X \to Y$, $\mathfrak{M}$ 为 Y 上的 σ-代数. 则

$$f^*\mathfrak{M} = \{f^{-1}(A) : A \in \mathfrak{M}\}$$

定义了 X 上的 σ-代数. 为验证这一点, 仅需运用 f^{-1} 对集合运算的保持性.

思考题 是否存在可数无穷多元素组成的 σ-代数?

命题 1.8 设 X 为非空集合, $\mathfrak{M}$ 为 X 上的 σ-代数, 则

(1) $\varnothing \in \mathfrak{M}$;

(2) 若 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}$, 则 $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathfrak{M}$.

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathfrak{M}$, 则 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{M}$;

(4) 若 $A, B \in \mathfrak{M}$, 则 $A \setminus B \in \mathfrak{M}$.

证明 证明留作习题. □

定理 1.14 设 X 为非空集合, I 为任意指标集, 对每一 $i \in I$, $\mathfrak{M}_i$ 均为 X 上的 σ-代数, 则 $\bigcap\limits_{i\in I} \mathfrak{M}_i$ 亦为 X 上的 σ-代数.

由定理 1.14, 对任意 X 的子集族 S, 定义

$$\sigma(S) = \bigcap\{\mathfrak{M} : \mathfrak{M}\text{为包含 } S \text{ 的 } \sigma\text{-代数}\}.$$

因为 $S \subset \mathscr{P}(X)$, 故 $\sigma(S)$ 是有意义的. $\sigma(S)$ 为包含 S 的最小 σ-代数, 我们称 $\sigma(S)$ 为 S 生成的 **σ-代数**.

定义 1.30 设 (X, τ) 为拓扑空间, $\sigma(\tau)$ 为拓扑 τ 生成的 σ-代数, 记作 $\mathscr{B}(X)$. $\mathscr{B}(X)$ 称作拓扑空间 X 上的 **Borel 集类**, $\mathscr{B}(X)$ 中的元称作 **Borel 集**.

对于拓扑空间 (X, τ), 显然所有开集、闭集均为 Borel 集. 除此之外, 最常见的还有两类, X 中开集的可数交和闭集的可数并, 这两类分别称作**G_δ 集**和 **F_σ 集**.

例 1.30 有理数集 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ 为 F_σ 集, 但非 G_δ 集.

例 1.31 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的连续点集为 G_δ 集. 事实上, f 的连续点集

$$\{x : \omega_f(x) = 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x : \omega_f(x) < \frac{1}{k}\right\}.$$

注意到, 振幅函数 ω_f 为上半连续 (参见本章末习题 4).

*Dynkin 系统

为了进一步理解 σ-代数的结构, 我们引入 Dynkin (邓肯) 系统的概念.

定义 1.31　非空集合 X 上的子集族 $\mathscr{D}$ 称作 **Dynkin 系统**, 是指满足

(1) $X \in \mathscr{D}$;

(2) $A \in \mathscr{D}$, 则 $A^c \in \mathscr{D}$;

(3) $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ 两两不交, 则 $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathscr{D}$.

很明显, 任意 σ-代数均为 Dynkin 系统.

例 1.32　假设 X 为一具有偶数 $2n$ 个元素的有限集, 则 X 中所有具有偶数个元素的子集构成的子集族 $\mathscr{D}$ 为一 Dynkin 系统. 若 $n > 1$, 则 $\mathscr{D}$ 不为一集合代数, 从而也不是 σ-代数.

若 $\mathscr{D}$ 为一 Dynkin 系统, 则 $\varnothing \in \mathscr{D}$. 容易看出, (3) 蕴涵了 "$\mathscr{D}$ 中集合有限并封闭". 注意到在 Dynkin 系统的定义中, (2) 与 (3) 表明 "若 $A, B \in \mathscr{D}$ 且 $A \subset B$, 则 $B \setminus A \in \mathscr{D}$". 这是因为 A 与 B^c 不交, 因此 $A \cup B^c \in \mathscr{D}$, 从而 $B \setminus A = B \cap A^c = (A \cup B^c)^c \in \mathscr{D}$.

对于非空集合 X 的子集族 S, 若 S 中单调递增的可数集合列之并以及单调递减集合列之交均为 S 中的集合, 则称 S 为**单调类**. 这说明 Dynkin 系统具有 "单调递增的可数集合列之并封闭" 的性质. 事实上, 若 $\{A_k\} \subset \mathscr{D}$ 单调递增, 定义 $B_1 = A_1$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ $(k \geqslant 2)$, 则每一 $B_k \in \mathscr{D}$ 且两两不交. 故由 (3), $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} B_k \in \mathscr{D}$. 再由 (1) 和 (2), 还表明 "单调递减集合列之交封闭", 可知 Dynkin 系统为单调类.

因此, Dynkin 系统成为 σ-代数需要条件 "$\mathscr{D}$ 中集合有限交封闭".

定理 1.15　*X 上的 Dynkin 系统 $\mathscr{D}$ 为 σ-代数, 若 $\mathscr{D}$ 满足条件 "$\mathscr{D}$ 中集合有限交封闭".*

证明　首先证明若 $A, B \in \mathscr{D}$, 则 $A \setminus B \in \mathscr{D}$. 事实上, $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$. 由 "$\mathscr{D}$ 中集合有限交封闭" 条件, $A \cap B \in \mathscr{D}$, 从而由上面的注记, $A \setminus B \in \mathscr{D}$. 另外, "$\mathscr{D}$ 中集合有限交封闭" 条件还蕴涵了 "$\mathscr{D}$ 中集合有限并封闭".

下面证明满足 σ-代数定义中的 (3). 假设 $\{A_k\} \subset \mathscr{D}$, 定义

$$B_1 = A_1,$$

$$B_k = A_k \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}), \quad k \geqslant 2.$$

则 $\{B_k\} \subset \mathscr{D}$ 且两两不交. 由 Dynkin 系统定义中的 (3), $\cup A_k = \cup B_k \in \mathscr{D}$. □

类似于 σ-代数的情形, 对于集合 X 的任意子集族 S, 可以定义**包含 S 的最小 Dynkin 系统**如下:

$$\delta(S) = \cap\{\mathscr{D} : \mathscr{D}\text{为包含 } S \text{ 的 Dynkin 系统}\}.$$

集合族 $\delta(S)$ 也称作 X 的子集族 S **生成的 Dynkin 系统**.

定理 1.16 若集合 X 的任意子集族 S 满足有限交封闭则有 $\delta(S)=\sigma(S)$.

证明 由于 σ-代数为 Dynkin 系统, $\sigma(S)$ 为 Dynkin 系统, 故 $\delta(S)\subset\sigma(S)$. 相反, 如果 $\delta(S)$ 为 σ-代数, 则类似可以证明 $\sigma(S)\subset\delta(S)$. 因此, 由定理 1.15, 我们只需验证集合族 $\delta(S)$ 满足有限交封闭的性质.

对任意 $D\in\delta(S)$, 定义

$$\mathscr{D}_D=\{A\subset X: A\cap D\in\delta(S)\}.$$

不难验证 $\mathscr{D}_D$ 为一 Dynkin 系统. 任给 $E\in S$, 由 S 满足有限交封闭的假设, $S\subset\mathscr{D}_E$, 从而 $\delta(S)\subset\mathscr{D}_E$. 因此对任意 $E\in S$ 和 $D\in\delta(S)$, $E\cap D\in\delta(S)$. 这说明 $S\subset\mathscr{D}_D$, 从而对所有 $D\in\delta(S)$ 有 $\delta(S)\subset\mathscr{D}_D$, 即 $\delta(S)$ 满足有限交封闭的性质. □

习题

1. (Baire-Hahn 逼近和插值定理) 我们先从稍微简单的结论出发.

(1) 设 (X,d) 为度量空间, $f:X\to[-\infty,+\infty]$ 下半连续、下有界且 $f\not\equiv+\infty$, 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 定义 $f_n(x)=\inf\limits_{y\in X}\{f(y)+nd(x,y)\}$, $x\in X$. 证明 f_n 为 X 上的 Lipschitz 函数且 $\mathrm{Lip}\,(f)\leqslant n$, $0\leqslant f_1\leqslant f_2\leqslant\cdots\leqslant f$ 且任给 $x\in X$, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$.

若进一步 X 为局部紧的, 则 f_n 定义中的 inf 可以取到, 并且对任意 f_n 对应的极小元 y_n, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x$.

若去掉条件 "f 下有界", 结论亦成立.

(2) 在 (1) 中, 如果定义 $f_n(x)=\inf\limits_{y\in X}\{f(y)+nd^2(x,y)\}$, 相应结论亦成立.

上述结论称作 Baire 定理. 它可以表述为: 若 X 为度量空间, $f:X\to\mathbb{R}$ 为下半连续函数当且仅当 f 为一单调递增连续函数 f_n 的逐点收敛极限. 读者可参见文献 [9, Proposition 7.20] 另一个基于 Urysohn 引理的证明.

(3) 若 $X=\mathbb{R}^n$ (赋予标准度量), $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为凸函数, 定义 $f_\varepsilon(x)=\inf\limits_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{f(y)+\dfrac{|x-y|^2}{2\varepsilon}\right\}$, $x\in\mathbb{R}^n$, $\varepsilon>0$. 证明, 存在 $\varepsilon_0>0$ 使得对 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, f_ε 为 C^1 的, 并且导数 f_ε' 为 Lipschitz 函数. 而且当 $\varepsilon\searrow0$ 时, f_ε 单调递增逐点收敛于 f.

(4) 设 S 为任意集合, $f:\mathbb{R}^n\times S\to\mathbb{R}$ 且 $f(\cdot,s)$ 对任意 $s\in S$ 为凸函数, 证明 $F(x)=\sup\limits_{s\in S}f(x,s)$ 仍为凸函数. 结合这一点以及上一习题, 能否给出一个对于一般有界连续函数 f 利用光滑函数逼近的方法?

上面 (3) 中的逼近在凸分析里称作 Moreau-Yosida 逼近, (4) 中的逼近方法称作

Lasry-Lions 正则化.

(5) 设 X 为度量空间, f 和 g 分别为 X 上的下半连续函数和上半连续函数, $g \leqslant f$ ($g < f$). 证明存在 X 上的连续函数 h 使得 $g \leqslant h \leqslant f$ ($g < h < f$). (5) 的结论称作 Hahn 插值定理[9, Proposition 7.21]. 若 X 为仿紧空间, 这个结论 (C. H. Dowker) 也是正确的. 参见文献 [16, 第 171 页].

2. 设 (X, d) 为度量空间, d_A 为关于集合 $A \subset X$ 的距离函数. 对任意 X 的子集 A, B, 定义

$$d_H(A, B) = \max\left\{\sup_{b\in B} d_A(b), \sup_{a\in A} d_B(a)\right\}.$$

$d_H(A, B)$ 称作子集 A, B 的 **Hausdorff 距离**.

(1) 证明 d_H 为幂集 $\mathcal{P}(X)$ 上的伪度量. (此处度量定义中允许取到 $+\infty$, d 为伪度量指度量定义中 "$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$" 可能不成立.)

(2) 对任给 $A \subset X$, $d_H(A, \overline{A}) = 0$. 若 $A, B \subset X$ 为闭集且 $d_H(A, B) = 0$, 则 $A = B$.

(3) 设 $\mathfrak{C}(X)$ 为 X 上所有闭集组成的集合族, 若 $\mathfrak{C}(X)$ 中的序列 $\{A_k\}$ 依 Hausdorff 距离收敛于 $A \in \mathfrak{C}(X)$, 则 $A = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} \overline{\bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k}$.

(4) 证明, 若 (X, d) 为完备度量空间, 则 $(\mathfrak{C}(X), d_H)$ 亦然; 若 (X, d) 为紧度量空间, 则 $(\mathfrak{C}(X), d_H)$ 亦然. 所有 $\mathbb{R}^n$ 上的紧凸集在 $(\mathfrak{C}(\mathbb{R}^n), d_H)$ 中为闭集.

3. 设 $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 且对任意 $x \in \mathbb{R}$, 存在 $n = n(x)$, 使得 $f^{(n)}(x) = 0$. 证明, f 为实多项式.

4. 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 证明 f 的振幅函数 $\omega_f = \overline{f} - \underline{f}$ 为上半连续.

5. 设 $F \subset \mathbb{R}$ 为闭集且 $F^c = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} (a_k, b_k)$ (区间 (a_k, b_k) 两两不交), 证明, F 为完全集当且仅当这些区间无公共端点.

6. (Aleksandroff-Hausdorff) 证明, 任意紧度量空间 X 必为标准 Cantor 集 C 在连续映射下的像.

7. 证明, Cantor 三分集 C 同胚于 $\Sigma_\infty = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (赋予乘积拓扑).