

第一章

结合代数的表示 与群代数

本书的目标是介绍有限群的表示理论. 一个群的表示可以理解成群到某个线性空间的一般线性群的一个同态, 同时也可以看成由群决定的一个结合代数 (即群代数) 上的模. 历史上第一次将表示与模联系起来的数学家是 E. Noether (诺特). Noether 的思想不但极大地促进了表示理论的发展, 同时催生了代数学中极其重要的模的概念. 模的概念产生后, 人们从抽象的角度对模的结构进行系统研究, 获得一系列优美的结果, 其中最具代表性的成果当属主理想整环有限生成模的结构理论. 现在, 模论不但是代数学中重要的研究课题, 同时已经成为数学研究中的重要工具, 在微分几何、代数拓扑等领域有重要应用.

本章我们将从纯代数的观点介绍与表示理论有关的一些知识, 特别是结合代数的表示, 或者说结合代数上的模的基本性质. 作为特例, 我们将着重研究群代数的若干性质, 特别是其半单性的判别方法. 第二章开始我们将从同态的观点定义和研究有限群的表示, 但过程中凡是可以用模的观点来理解和证明的结论, 我们将同时采用模的理论来加以说明.

1.1 结合代数的表示

给定一个群和一个域, 我们将定义这个域上的一个线性空间, 并在该线性空间上定义乘法, 使其成为一个结合代数, 称为该群的群代数. 为了了解群代数的结构和性质, 我们需要系统研究结合代数的基本性质, 特别是结合代数的表示或模的性质.

定义 1.1.1 设 A 是域 F 上的线性空间, 若 A 上有满足双线性性的二元运算 (一般用乘法表示), 即对任意 $a, b, c \in A$, $k, \ell \in F$, 有

$$a(kb + \ell c) = k(ab) + \ell(ac), \quad (kb + \ell c)a = k(ba) + \ell(ca),$$

则称 A 是一个 F -代数. 如果这个二元运算还满足结合律, 即

$$a(bc) = a(bc), \forall a, b, c \in A,$$

则称 A 是一个 F -结合代数 (有时为简略起见, 也简称为 F -代数). 如果 A 作为线性空间是有限维的, 那么 A 称为有限维代数. 我们约定本书中的代数都有么元 (即对乘法的单位元), 记为 1_A .

以下除非特别声明, 我们所说的代数都是指有么元的结合代数. 我们先给出一些例子.

例 1.1.1 F 上的 n 元多项式集合 $F[x_1, \dots, x_n]$, 在多项式的加法、数乘和乘法下成为一个代数.

例 1.1.2 设 V 是域 F 上的线性空间, $A = \text{End}(V)$ 是 V 上的全体线性变换组成的线性空间, 则映射的复合定义了 A 上的乘法, 使得 A 成为一个代数.

例 1.1.3 一个域 F 上的全体 $n \times n$ 矩阵组成的集合 $F^{n \times n}$, 在矩阵的加法、数乘和乘法下成为一个代数.

因为本书介绍的主要目标是有限群的表示, 所以下面我们主要关注的代数是有限群的群代数.

定义 1.1.2 设 G 是有限群, F 是一个域. 群代数 $F[G]$ 作为 F -线性空间由 G 的元素生成 (即 G 的元素作为 $F[G]$ 的一组基), 对 $F[G]$ 中的向量 $\sum_{g \in G} a_g g$ 和 $\sum_{h \in G} b_h h$, 定义乘法为

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g \right) \left(\sum_{h \in G} b_h h \right) := \sum_{g, h \in G} (a_g b_h) (gh) = \sum_{s \in G} \left(\sum_{s=gh} a_g b_h \right) s.$$

容易验证, 线性空间 $F[G]$ 在上述乘法下成为一个 F -代数, 称为群 G 在域 F 上的群代数.

从定义我们看出, 结合代数的实质就是在线性空间上定义了满足双线性性和结合律的乘法. 容易看出, 如果只考虑加法和乘法, 则任何结合代数也是一个环. 因此我们可以将环的有关概念引进到代数上来.

定义 1.1.3 设 A 为一个代数. A 的一个子空间 B 称为子代数, 如果对任意 $a, b \in B$, 有 $ab \in B$. A 的子空间 I 称为左理想 (右理想), 如果对任意 $a \in A, b \in I$, 有 $ab \in I$ ($ba \in I$), 如果 I 既是左理想也是右理想, 那么称为 A 的双边理想 (简称理想). 特别地, $\{0\}$ 和 A 称为平凡理想. 若 I 是理想, 则在商空间 A/I 上可以定义乘法使之成为代数, 称为 A 对 I 的商代数. 如果 A 没有非平凡理想, 那么称 A 是单代数.

定义 1.1.4 设 A 和 B 是 F 上的代数, 一个线性映射 $\varphi \in \text{Hom}(A, B)$ 称为代数同态, 如果对任意 $a, b \in A$,

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \quad \varphi(1_A) = 1_B,$$

其中 $1_A, 1_B$ 分别是 A 和 B 的么元. 如果一个代数同态 φ 是双射, 我们就称 φ 为代数同构.

由环的理论可知, 同态的核 $\text{Ker}(\varphi)$ 是 A 的理想, 同态的像 $\text{Im}(\varphi)$ 是 B 的子代数, 并且 $A/\text{Ker}(\varphi)$ 与 $\text{Im}(\varphi)$ 是同构的代数.

例 1.1.4 设 V 是 F 上的 n 维线性空间, 取定 V 的一组基后, 线性变换 T 在这组基下的矩阵表示 $\varphi(T)$ 给出了 $\text{End}(V)$ 到 $F^{n \times n}$ 的代数同构.

下一章我们将介绍群的表示的概念, 这也是本书的主要研究对象. 粗略地说, 一个群的表示是该群到一个线性空间 V 的一般线性群 $\text{GL}(V)$ 的群同态. 但是群表示也可以用相应的群代数的表示来描述. 我们先给出代数表示的概念.

定义 1.1.5 设 A 为一个有限维 F -代数, V 是有限维 F -线性空间. 若 φ 是一个 A 到 $\text{End}(V)$ 的 F -代数同态, 则称 (φ, V) 为 A 的一个 F -表示. 我们将 V 称为表示空间, 而 $\dim V$ 为表示的维数.

定义 1.1.6 设 A 是一个代数, 一个 A -左模是指 F 上的线性空间 V , 并且定义了二元运算 $A \times V \rightarrow V$, $(a, v) \mapsto av$ 满足对任意 $a, b \in A$, $k \in F$, $v, w \in V$, $1_A v = v$, 且

$$a(v + w) = av + aw, \quad (a + b)v = av + bv, \quad (ka)v = k(av) = a(kv), \quad (ab)v = a(bv).$$

这等价于存在代数同态 $\rho: A \rightarrow \text{End}(V)$. 类似地, 我们可以定义 A -右模. 如果 V 既是 A -左模又是 A -右模, 且对任何 $a, b \in A$, $v \in V$, $(av)b = a(vb)$, 则称 V 为 A -双模.

下面的命题可以用代数表示和左模的概念直接给出, 留作习题.

命题 1.1.1 设 (φ, V) 为 F -代数 A 的一个表示, 定义 $A \times V \rightarrow V$ 为 $(a, v) \mapsto \varphi(a)(v)$, 则 V 成为一个 A -左模.

反之, 若 V 为 F -代数 A 的一个左模, 定义映射 $\varphi: A \rightarrow \text{End}(V)$ 为 $\varphi(a)(v) = av$, 则 (φ, V) 成为 A 的 F -表示.

这个命题说明, 一个代数的表示和该代数上的左模是两个等价的概念. 因此下面我们利用模的语言来叙述有关的结果. 与抽象代数中环上的模的概念类似, 我们可以定义代数上的模的子模, 模的直和. 在此我们不再赘述.

定义 1.1.7 如果代数 A 的模 V 没有非平凡子模, 那么 V 称为不可约模.

定义 1.1.8 代数 A 的模 V 称为完全可约模 (半单模), 如果 V 的任意子模 U 均有补子模, 即存在 V 的子模 W 使得 $V = U \oplus W$.

命题 1.1.2 A -模 V 是完全可约的当且仅当 V 是若干不可约 A -模的直和.

证明 设 A -模 V 是完全可约模, W 是 V 的子模. 我们先说明 W 也是完全可约的. 设 U 是 W 的子模, 则存在 U 在 W 中的补子模 U' , 即 $W = U \oplus U'$. 于是 $W = U \oplus (U' \cap W)$. 即 $U' \cap W$ 是 U 在 W 中的补子模. 故 W 是完全可约的. 若 U_1 是 V 的不可约子模, U_1 的补子模 W_1 也是完全可约的, 将 W_1 分解为不可约子模 U_2 及其补子模的直和. 依次进行下去, 可得 V 分解为若干不可约 A -模的直和.

另一方面, 设 $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$, 其中 V_i 是不可约模. U 是 V 的子模, 令

$$\mathcal{S} = \{V \text{ 的子模 } W \mid W \cap U = \{0\}\}.$$

$\mathcal{S}$ 在包含关系下成为一个偏序集. 设 $W_1 \subseteq W_2 \subseteq \cdots$ 是 $\mathcal{S}$ 中的一条链, 令 $W' = \sum W_i$. 则 $W' \cap U = \{0\}$, 即 $W' \in \mathcal{S}$. 故 W' 是这条链的上界. 根据 Zorn (佐恩) 引理, $\mathcal{S}$ 有极大元 U' , 满足 $U' \cap U = \{0\}$. 下面我们说明 $V = U \oplus U'$. 假设此式不成立, 则存在 $x \in V$, 使得 $x \notin U \oplus U'$. 设 $x = \sum_{i \in I} x_i$, 其中 $x_i \in V_i$. 则存在 $x_j \notin U \oplus U'$. 由 V_j 是不可约模可知 $V_j \cap (U \oplus U') = \{0\}$. 从而 $(U \oplus U') + V_j = (U \oplus U') \oplus V_j = U \oplus (U' \oplus V_j)$.

于是 $U' \oplus V_j \in \mathcal{S}$. 这与 U' 是 $\mathcal{S}$ 的极大元矛盾. 因此 $V = U \oplus U'$. 从而 V 是完全可约的. $\square$

此外, 模同态也是非常重要的概念, 为方便记, 我们回忆一下其定义.

定义 1.1.9 设 A 为一个代数, V, W 是 A -模. 一个 V 到 W 的线性映射 T 称为模同态, 如果对任意 $a \in A, v \in V$,

$$T(av) = aT(v).$$

如果一个模同态 T 可逆, 则称 T 为模同构, 这时称 V 和 W 同构, 记为 $V \cong W$. 由 V 到 W 的所有模同态的全体记为 $\text{Hom}_A(V, W)$.

A -模同态的含义是线性映射 T 与 A 在 V 上的作用是交换的. 由此可知模同态 T 保持模的结构, 比如子模的原像和像均为子模. 命题 1.1.2 中的不可约分解在同构的意义下是唯一的, 也就是说若 A -模 $V \cong n_1 V_1 \oplus \cdots \oplus n_r V_r$, 其中 $V_1, \dots, V_r$ 是彼此不同构的不可约 A -模, $n_i V_i$ 表示 n_i 个 V_i 的直和, 那么 n_i 和 V_i 是在同构的意义下由 V 唯一确定的. (证明留作习题)

例 1.1.5 设 A 是代数, 由其乘法的结合性可得 A 自身上的左模, 右模和双模结构. 事实上我们可以定义 $A \times A$ 到 A 的映射 L 如下: 对 $a, b \in A, L(a, b) = L_a(b) = ab$. 容易看出, 映射 L 给出了 A 作为环 A 上的一个左模结构, 记为 ${}_A A$. 类似地, $R_a(b) = ba$ 给出右 A -模 A_A . ${}_A A$ (A_A) 分别称为 A 的左 (右) 正则模. 由定义, 左 (右) 正则模的子模是 A 的左 (右) 理想. 如果 A 的一个左理想作为 A -模是不可约的, 则称该左理想称为极小左理想. 请读者自己思考如何定义 A 作为 A 上的双模结构.

下面我们来研究半单代数的结构. 后面我们将看到, 群代数的半单性对应的是群表示的完全可约性.

定义 1.1.10 有限维代数 A 称为半单代数, 如果 A 的任何有限维模都是完全可约的.

这个定义涉及 A 的所有有限维模, 但一个有限维代数是否半单, 可以由代数 A 自身的性质完全决定. 事实上我们有

命题 1.1.3 有限维代数 A 是半单的当且仅当其左正则模 ${}_A A$ 是完全可约的.

证明 只需证明若左正则模 ${}_A A$ 是完全可约的, 则代数 A 是半单的. 设 ${}_A A = I_1 \oplus \cdots \oplus I_r$ 是 ${}_A A$ 的不可约子模分解, 其中 I_i 是 A 的极小左理想. 设 M 是 A -左模, $\{v_1, \dots, v_n\}$ 是 M 的基. 那么对 $i = 1, \dots, r$ 和 $j = 1, \dots, n, I_i v_j$ 都是 A -模. 令 $\varphi_{ij} : I_i \rightarrow I_i v_j$ 为 A -模同态 $\varphi_{ij}(a) = av_j$, 则 φ_{ij} 是满射. 再由 I_i 是极小左理想可知, φ_{ij} 是同构. 从而 $I_i v_j$ 是不可约模. 于是 M 是不可约模 $I_i v_j$ 的直和, 因此 M 是完全可约的. $\square$

可见有限维代数 A 是半单的也等价于左正则模 ${}_A A$ 是不可约模的直和. 并且在同构的意义下, A 的不可约模都已包含在左正则模 ${}_A A$ 中.

命题 1.1.4 设 A 是有限维半单代数, 则 A 的任意有限维不可约模都同构于 ${}_A A$ 的某个子模.

证明 设 M 是 A 的有限维不可约模. 取 M 中非零元 v , 使得 Av 是 M 的非零子模. 由于 M 是不可约的, 所以 $Av = M$. 令 $\varphi: A \rightarrow M$ 为 $\varphi(a) = av$, 则 φ 是 A -模同态且是满射. 于是 $\text{Ker}(\varphi)$ 是 ${}_A A$ 的子模 (即 A 的左理想). 由 ${}_A A$ 是完全可约的, 可知存在 ${}_A A$ 的子模 V , 使得 ${}_A A = \text{Ker}(\varphi) \oplus V$, 因此 $M \cong {}_A A / \text{Ker}(\varphi) \cong V$. $\square$

关于不可约模之间的模同态, 我们有 Schur (舒尔) 引理.

定理 1.1.1 (Schur 引理) 设 M_1 和 M_2 是代数 A 的不同构的不可约模, 则

- (1) $\text{Hom}_A(M_1, M_2) = \{0\}$;
- (2) $\text{Hom}_A(M_1, M_1)$ 是除环;
- (3) 若 F 是代数闭域 (例如复数域 $\mathbb{C}$), 则 $\text{Hom}_A(M_1, M_1) = \{\lambda \cdot \text{id}_{M_1} \mid \lambda \in F\} \cong F$.

证明 (1) 设 $T \in \text{Hom}_A(M_1, M_2)$ 为 A -模同态, 则 $\text{Ker}(T)$ 是 M_1 的子模, 且 $\text{Im}(T)$ 是 M_2 的子模. 由 M_1 不可约, 知 $\text{Ker}(T) = \{0\}$ 或 M_1 . 若 $\text{Ker}(T) = M_1$, 则 $T = 0$. 若 $\text{Ker}(T) = \{0\}$, 则 T 为单射, 我们继续考虑 $\text{Im}(T)$. 由 M_2 不可约, 我们有 $\text{Im}(T) = \{0\}$ 或 M_2 . 若 $\text{Im}(T) = \{0\}$, 则 $T = 0$. 若 $\text{Im}(T) = M_2$, 则 T 是双射, 从而 M_1 和 M_2 是同构的, 但这与假设矛盾, 所以 M_1 和 M_2 间的模同态只能是零映射.

(2) 回忆一下环论的一个结论: 若一个幺环中任何非零元素都可逆, 则该环一定是除环. 注意到线性映射间的加法和乘法使得 $\text{Hom}_A(M_1, M_1)$ 成为一个幺环. 由 (1) 的证明可知, 非零的模同态是可逆的, 从而 $\text{Hom}_A(M_1, M_1)$ 中任何非零元素可逆. 故 $\text{Hom}_M(V_1, V_1)$ 是一个除环.

(3) 当 F 是代数闭域时, 对任意 $T \in \text{Hom}_A(M_1, M_1)$, 存在特征值 $\lambda \in F$, 从而 $\lambda \cdot \text{id}_{M_1} - T$ 不可逆. 故 $\lambda \cdot \text{id} - T = 0$, 即 $T = \lambda \cdot \text{id}_{M_1}$. $\square$

1.2 半单代数的结构

本节我们将研究半单代数的结构. 设 A 是半单代数, I 是 A 的左理想, 则由左正则模 ${}_A A$ 是完全可约的, 可知存在左理想 I' 使得 $A = I \oplus I'$. 特别地, 对于 A 的幺元 1_A , 存在唯一的 $e \in I$ 和 $e' \in I'$, 使得

$$1_A = e + e'.$$

两边左乘 e 得 $e = e^2 + ee'$. 由 $e, e^2 \in I, ee' \in I'$ 且 $I \cap I' = \{0\}$, 我们得到 $e = e^2$ 和 $ee' = 0$. 同样的方法也可以得到 $e' = (e')^2$ 和 $e'e = 0$.

进一步, 对 $a \in I$, 我们有 $a = a1_A = a(e + e') = ae + ae'$, 其中 $ae' \in I \cap I' = \{0\}$. 由此可得 $a = ae \in Ae$. 因此 e 是 I 中的左单位元, 而且 $I \subseteq Ae$. 另一方面, 由 $e \in I$ 且 I 是理想, 我们有 $Ae \subseteq I$. 故 $I = Ae$.

上面的分析引导我们给出下面的概念.

定义 1.2.1 如果半单代数 A 中元素 e 满足 $e^2 = e$, 那么就称 e 为**幂等元**. 若 e 和 e' 都是幂等元, 且 $ee' = e'e = 0$, 则称幂等元 e 和 e' 为**正交的**.

通过上面的讨论, 我们证明了

命题 1.2.1 I 是 A 的左理想当且仅当存在幂等元 e 使得 $I = Ae$.

下面我们考察左正则表示的不可约子模, 也就是代数的极小左理想. 延续上面的思路, 我们用幂等元来研究左理想. 设 $e \in A$ 是幂等元. 若左理想 $I = Ae$ 可以分解为两个左理想的直和 $I = I_1 \oplus I_2$, 则存在 $e_1 \in I_1$ 和 $e_2 \in I_2$ 使得 $e = e_1 + e_2$. 从而对 $x \in I_1$, 我们有 $x = xe = xe_1 + xe_2$, 所以 $xe_1 \in I_1$, $xe_2 = x - xe_1 \in I_1 \cap I_2$, 故 $xe_2 = 0$ 且 $x = xe_1$. 同理对 $y \in I_2$, $y = ye_2$, $ye_1 = 0$. 这说明 e_1 和 e_2 是正交的幂等元, 且 $I_1 = Ae_1$, $I_2 = Ae_2$.

定义 1.2.2 一个幂等元 e 称为**本原幂等元**, 如果 $e \neq 0$, 且 e 不能分解为两个非零且正交的幂等元之和.

注意, 当基域 F 的特征不等于 2 时, 两个非零幂等元正交的条件可以去掉. 这是因为, 若 $e = e_1 + e_2$, 则 $e = e^2 = e_1 + e_2 + e_1e_2 + e_2e_1$, 即 $e_1e_2 + e_2e_1 = 0$. 此式两边分别左乘和右乘 e_1 , 得

$$0 = e_1(e_1e_2 + e_2e_1) = e_1e_2 + e_1e_2e_1$$

$$0 = (e_1e_2 + e_2e_1)e_1 = e_1e_2e_1 + e_2e_1.$$

于是 $e_1e_2 = e_2e_1$. 若 F 的特征不为 2, 则由 $e_1e_2 + e_2e_1 = 0$ 以及 $e_1e_2 = e_2e_1$, 可得 $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$.

定理 1.2.1 设 $e \in A$ 是幂等元, 则下列条件等价:

- (1) Ae 是极小左理想;
- (2) e 是本原幂等元;
- (3) eAe 是 F 上的有限维除环. 特别地, 若 F 是代数闭域, 则 $eAe \cong F$.

证明 由于 A 的左正则模是完全可约的, 所以 Ae 是极小左理想等价于 Ae 不可分解为非零左理想的直和. 所以 (1) 和 (2) 是等价的. 以下我们证明 (2) 和 (3) 等价. 若 e 不是本原幂等元, 则有分解 $e = e_1 + e_2$, 其中 e_1, e_2 是非零的幂等元且 $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$. 于是 $ee_1 = e_1e = e_1$, 且 $ee_2 = e_2e = e_2$. 注意到 eAe 是以 e 为么元的代数, 而 $e_1 = ee_1e \in eAe$, $e_2 = ee_2e \in eAe$, 故 e_1 和 e_2 是 eAe 中的零因子. 因此 eAe 不是除环. 反之, 若 e 是本原幂等元, 则 Ae 是极小左理想. 对任意 $x \in eAe$, 有 $x = exe$. 于是对 $x \neq 0$, $Ax = Aeexe$ 是包含在 Ae 中的非零左理想, 从而 $Ax = Ae$. 于是存在 $y \in A$ 使

得 $yx = e$. 由 $(eye)x = (eye)(exe) = eyexe = eyx = e^2 = e$, 可知 eye 是 x 在 eAe 中的逆元, 所以 eAe 是除环. 特别地, 如果 F 是代数闭域, 则它不存在非平凡的代数扩张, 而任何有限维扩张都是代数扩张, 因此 $eAe = F$. $\square$

定理 1.2.2 设 $I = Ae$ 和 $I' = Ae'$ 是 A 的两个极小左理想, 则下列条件等价:

- (1) 作为左 A -模, $I \cong I'$;
- (2) 存在 $a' \in I'$ 使得 $I' = Ia'$;
- (3) $I' = II'$;
- (4) $eAe' \neq \{0\}$;

如果 F 是代数闭域, 则上述条件还等价于

- (5) $\dim(eAe') = 1$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 $\varphi: I \rightarrow I'$ 为 A -模同构, 则对 $x \in I$, $\varphi(x) = \varphi(xe) = x\varphi(e)$. 令 $a' = \varphi(e)$, 则 $\varphi(I) \subseteq Ia' \subseteq I'$. 由 φ 是同构可知 $I' = Ia'$.

(2) $\Rightarrow$ (3) 由 (2) 得 $I' \subseteq II' \subset I'$, 故 $I' = II'$.

(3) $\Rightarrow$ (4) 由 (3) 得 $I' = II' = AeAe'$, 故 $eAe' \neq \{0\}$.

(4) $\Rightarrow$ (1) 设 $a' \in eAe'$ 是非零元, 则由 I' 是极小左理想知 $Aa' = I'$. 考虑映射 $\varphi_{a'}: I \rightarrow I'$, $\varphi_{a'}(x) = xa'$, $x \in I$, 则 $\varphi_{a'}$ 为 A -模同态. 注意到任何 $x' \in I'$ 都可以写成 $x' = ya' = yea'e' = ye(ea'e') = yea'$, 即 $\varphi_{a'}(ye) = x'$, 所以 $\varphi_{a'}$ 是满射. 再由 I 是极小左理想可知, $\varphi_{a'}$ 是同构.

最后, 设 F 是代数闭域, 我们证明 (4) $\Leftrightarrow$ (5). 若 $eAe' \neq \{0\}$, 则对任意非零 $a', a'' \in I'$, $\varphi_{a'}$ 和 $\varphi_{a''}$ 都是 I 到 I' 的同构, 由 Schur 引理可知, 存在 $c \in F$ 使得 $\varphi_{a'} = c\varphi_{a''}$, 于是 $\varphi_{a'} - ca'' = 0$. 因此 $a' = ca''$, 从而 $\dim(eAe') = 1$. 反之是显然的. $\square$

推论 1.2.1 设 $I = Ae$ 和 $I' = Ae'$ 是 A 的两个极小左理想, 则下列条件等价:

- (1) $I \not\cong I'$;
- (2) $II' = \{0\}$;
- (3) $eAe' = \{0\}$.

例 1.2.1 考虑 $G = C_3 = \langle g | g^3 = e \rangle$. 通过计算可验证, 群代数 $A = \mathbb{C}[G]$ 有如下本原幂等元:

$$e_1 = \frac{1}{3}(e + g + g^2), \quad e_2 = \frac{1}{3}(e + \omega^2 g + \omega g^2), \quad e_3 = \frac{1}{3}(e + \omega g + \omega^2 g^2),$$

其中 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ 是 3 次单位根. 例如, 由 $e_2 A e_2 = \text{Span}\{e_2\}$ 是 1 维线性空间可知 e_2 是本原幂等元. 而且 e_1, e_2, e_3 是两两正交的幂等元. 所以 A 的极小左理想分解为

$$A = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus Ae_3.$$

例 1.2.2 考虑正三角形的对称群 $G = D_3 = \langle a, b | a^2 = b^3 = e, aba^{-1} = b^{-1} \rangle$. 以下均为群代数 $A = \mathbb{C}[G]$ 的幂等元:

$$e_1 = \frac{1}{6} \sum_{g \in G} g, \quad e_2 = \frac{1}{6} \sum_{g \in G} \text{sgn}(g)g = \frac{1}{6}(e + b + b^2 - a - ab - ab^2),$$

$$e_3 = \frac{1}{3}(e + \omega^2 b + \omega b^2), \quad e_4 = \frac{1}{3}(e + \omega b + \omega^2 b^2),$$

它们满足 $ae_1 = be_1 = e_1$, $ae_2 = -e_2$, $be_2 = e_2$, $ae_3 = e_4a$, $ae_4 = e_3$, $be_3 = \omega e_3$ 和 $be_4 = \omega^2 e_4$. 于是 $V_1 = Ae_1$ 和 $V_2 = Ae_2$ 是 1 维 $\mathbb{C}[G]$ -模. $V_3 = Ae_3 = \text{Span}\{e_3, ae_3\}$ 和 $V_4 = Ae_4 = \text{Span}\{e_4, ae_4\}$ 是 2 维 $\mathbb{C}[G]$ -模. 通过左乘作用, a 和 b 在 V_3 上作用的矩阵分别为

$$\rho_3(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_3(b) = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}.$$

于是 $e_3 Ae_3 = \text{Span}\{e_3\}$ 是 1 维线性空间, 从而 e_3 是本原幂等元, V_3 是极小左理想. 同样的计算可知 e_4 也是本原幂等元, $V_4 = Ae_4$ 也是极小左理想. 并且 e_1, e_2, e_3, e_4 是两两正交的幂等元. 于是 A 可以分解为极小左理想的直和

$$A = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus Ae_3 \oplus Ae_4.$$

其中 $Ae_3 \cong Ae_4$, 这是因为 $e_3 Ae_4 = \text{Span}\{ae_4\}$ 是 1 维的.

例 1.2.3 在例 1.2.2 中, 我们计算了群代数 $A = \mathbb{C}[D_3]$ 的极小左理想分解. 现在我们继续讨论将 A 分解为代数的直和. 注意到 $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = e$, $\dim(e_1 Ae_i) = \dim(e_i Ae_1) = \delta_{1i}$ 以及 $\dim(e_2 Ae_j) = \dim(e_j Ae_2) = \delta_{2j}$. 我们得到 A 的代数分解.

$$A = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)A(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = e_1 Ae_1 \oplus e_2 Ae_2 \oplus (e_3 + e_4)A(e_3 + e_4).$$

这里 $e_1 Ae_1$ 和 $e_2 Ae_2$ 是 1 维代数, 单位元分别为 e_1 和 e_2 . 它们可以看作是矩阵代数 $\mathbb{C}^{1 \times 1} = \mathbb{C}$.

对于 $B = (e_3 + e_4)A(e_3 + e_4)$, 它是 4 维的代数, 单位元是 $e_3 + e_4$. 下面我们说明它同构于矩阵代数 $\mathbb{C}^{2 \times 2}$. 首先, 由 $e_3 Ae_3 = \text{Span}\{e_3\}$, $e_3 Ae_4 = \text{Span}\{ae_4\}$, $e_4 Ae_3 = \text{Span}\{ae_3\}$ 和 $e_4 Ae_4 = \text{Span}\{e_4\}$, 可知

$$B = e_3 Ae_3 \oplus e_3 Ae_4 \oplus e_4 Ae_3 \oplus e_4 Ae_4 = \text{Span}\{e_3, ae_4, ae_3, e_4\}.$$

故对任意 $x \in B$, 设 $x = x_{33}e_3 + x_{34}ae_4 + x_{43}ae_3 + x_{44}e_4$, 其中系数 $x_{33}, x_{34}, x_{43}, x_{44} \in \mathbb{C}$.

令 $\varphi: B \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ 为 $\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_{33} & x_{34} \\ x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}$. 设 $y = y_{33}e_3 + y_{34}ae_4 + y_{43}ae_3 + y_{44}e_4 \in B$,

则

$$xy = (x_{33}e_3 + x_{34}ae_4 + x_{43}ae_3 + x_{44}e_4)(y_{33}e_3 + y_{34}ae_4 + y_{43}ae_3 + y_{44}e_4)$$

$$= (x_{33}y_{33} + x_{34}y_{43})e_3 + (x_{33}y_{34} + x_{34}y_{44})ae_4 + (x_{43}y_{33} + x_{44}y_{43})ae_3 + \\ (x_{43}y_{34} + x_{44}y_{44})e_4.$$

于是

$$\varphi(xy) = \begin{pmatrix} x_{33}y_{33} + x_{34}y_{43} & x_{33}y_{34} + x_{34}y_{44} \\ x_{43}y_{33} + x_{44}y_{43} & x_{43}y_{34} + x_{44}y_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{33} & x_{34} \\ x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{33} & y_{34} \\ y_{43} & y_{44} \end{pmatrix} = \varphi(x)\varphi(y).$$

因此我们得到代数同构 $B \cong \mathbb{C}^{2 \times 2}$. 于是 $\mathbb{C}[D_3]$ 同构于 3 个矩阵代数的直和

$$\mathbb{C}[D_3] \cong \mathbb{C}^{1 \times 1} \oplus \mathbb{C}^{1 \times 1} \oplus \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

下面我们将证明一般的有限维半单代数也同构于若干个矩阵代数的直和. 设 A 是有限维半单代数. 作为左 A -模, A 可以分解为极小左理想的直和:

$$A = I_{11} \oplus \cdots \oplus I_{1i_1} \oplus I_{21} \oplus \cdots \oplus I_{2i_2} \oplus \cdots \oplus I_{r1} \oplus \cdots \oplus I_{ri_r},$$

其中 $I_{k1}, \dots, I_{ki_k}$ 是彼此同构的极小左理想 ($k = 1, \dots, r$). 令 $A_k = I_{k1} \oplus \cdots \oplus I_{ki_k}$, 于是 $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_r$, 且对于 $j \neq k$, $A_j A_k = \{0\}$.

引理 1.2.1 A_k 是 A 的单理想.

证明 首先, A_k 是左理想的和, 从而也是左理想. 其次, 由于 $A_k A = A_k (A_1 \oplus \cdots \oplus A_r) = A_k A_k \subseteq A_k$, 所以 A_k 是右理想, 从而 A_k 是双边理想. 设 B 是 A_k 中非零的极小双边理想, 则 $B = J_1 \oplus \cdots \oplus J_m$, 其中 $J_1, \dots, J_m$ 是彼此同构的极小左理想, 并且存在 $k \in \{1, \dots, r\}$ 使得 $J_1 \cong I_{k1}$. 由于对任意 $j = 1, \dots, i_k$, 我们有 $I_{kj} = I_{kj} J_1 \subseteq B$, 所以 $A_k \subseteq B$, 故 $B = A_k$. 因此 A_k 是 A 的单理想. $\square$

上面的引理表明, 作为一个代数, A_k 是单代数. 因此有限维半单代数是单代数的直和. 下面我们证明, 一般的单代数也和 A_k 类似, 是一些同构的极小左理想的直和.

命题 1.2.2 设 A 是单代数, 则存在 A 的极小左理想 $I_1, \dots, I_n$ 使得 I_k 彼此同构且 ${}_A A = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$.

证明 设 I 是 A 的维数最小的非零左理想, 则 I 是极小左理想. 对 $a \in A$, Ia 也是 A 的左理想. 并且 $\varphi_a: x \mapsto xa$ 是从 I 到 Ia 的满同态, 故 $Ia \cong I$ 或 $Ia = \{0\}$. 故对于 $a, b \in A$, $Ia \cap Ib = Ia$ 或 $\{0\}$. 在有限维代数 A 中, 考虑维数最大的形如 $Ia_1 \oplus \cdots \oplus Ia_m$ 的左理想 B , 则对任意 $b \in A$, 若 $Ia_k b$ 非零, 则 $Ia_k b \subseteq B$, 否则 $B + Ia_k b$ 为直和, 从而它的维数大于 B 的维数, 与 B 的维数极大矛盾. 于是 B 是 A 的双边理想, 因此 $B = A$. $\square$

这命题说明, 单代数 A 是彼此同构的极小左理想的直和, 即左正则模是完全可约的. 从而 A 是半单的. 下面我们进一步证明, 单代数 A 同构于某个矩阵代数. 为此先计算单代数到自身的模同态空间.

命题 1.2.3 设 I 是不可约 A -模, 则 $D = \text{End}_A(I)$ 是域 F 上的除环, 并且作为 F -代数,

$$\text{End}_A(nI) \cong M^{n \times n}(D),$$

其中 nI 是 n 个 I 的直和, $M^{n \times n}(D)$ 是除环 D 上的 $n \times n$ 矩阵代数.

证明 由 Schur 引理可知, $D = \text{End}_A(I)$ 是域 F 上的除环. 设 $\theta_{ij} \in D (i, j = 1, \dots, n)$. 对 $(x_1, \dots, x_n)^T \in nI$, 令

$$\theta \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \theta_{1j}(x_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \theta_{nj}(x_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \cdots & \theta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \theta_{n1} & \cdots & \theta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

则 $\theta_{ij} \in \text{End}_A(I)$, 故 $\theta \in \text{End}_A(nI)$. 另一方面, 对 $\theta \in \text{End}_A(nI)$, 令 $\theta_{ij}(x_j) = \pi_i \circ \theta \circ \iota_j(x_j)$, 其中 $\iota_j(x_j) = (0, \dots, x_j, \dots, 0) \in nI$ 是从 I 到 nI 的第 j 个分量的自然嵌入, π_i 是 nI 到第 i 个分量的自然投影. 则对 $i, j = 1, \dots, n$, 我们有 $\theta_{ij} \in \text{End}_A(I)$. 也就是说, 任意 $\theta \in \text{End}_A(nI)$ 都可以写成以上的矩阵形式. 所以 $\varphi: \theta \mapsto [\theta_{ij}]_{n \times n}$ 给出线性同构 $\text{End}_A(nI) \cong M^{n \times n}(D)$. 可以直接验证, φ 保持映射的复合, 从而 φ 是代数同构. $\square$

例 1.2.4 让我们从线性代数的角度来理解上述命题. 设 (ρ, V) 是群代数 $F[G]$ 的不可约表示, 也就是 $\rho: F[G] \rightarrow \text{End}(V)$ 是代数同态, 使得 V 成为不可约 $F[G]$ -模. 则在直和空间 $V \oplus V$ 上, $F[G]$ 的作用表示为分块对角矩阵: 对 $g \in G$,

$$(\rho \oplus \rho)(g) = \begin{pmatrix} \rho(g) & 0 \\ 0 & \rho(g) \end{pmatrix}.$$

设分块矩阵 $\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$ 表示 $V \oplus V$ 到自身的 $F[G]$ -模同态, 其中 $X_{ij} \in \text{End}(V)$ 是 V 上的线性变换. 则由

$$\begin{pmatrix} \rho(g) & 0 \\ 0 & \rho(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho(g) & 0 \\ 0 & \rho(g) \end{pmatrix}$$

可得 $\rho(g)X_{ij} = X_{ij}\rho(g)$, 对 $i, j = 1, 2$ 都成立, 即 $X_{ij} \in \text{End}_{F[G]}(V)$ 是 V 上的 $F[G]$ -模同态. 故模同态空间 $\text{End}_{F[G]}(V \oplus V)$ 同构于体 $\text{End}_{F[G]}(V)$ 上的矩阵空间 $M^{2 \times 2}(\text{End}_{F[G]}(V))$.

引理 1.2.2 设 A 是结合代数, A^{op} 是把 A 的元素逆向相乘来定义乘法的代数, 即 $x \circ_{\text{op}} y = yx$. 则 $\text{End}_A({}_A A) \cong A^{\text{op}}$.

证明 设 $\varphi \in \text{End}_A({}_A A)$, 则 $\varphi(x) = x\varphi(e)$, 其中 e 是 A 的单位元. 容易验证, $\theta: \varphi \mapsto \varphi(e)$ 是 $\text{End}_A({}_A A)$ 和 A 的线性空间同构. 对于 $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{End}_A({}_A A)$, 我们有 $(\varphi_1 \circ \varphi_2)(x) = \varphi_1(x\varphi_2(e)) = x\varphi_2(e)\varphi_1(e)$, 故 θ 把乘法的顺序颠倒了. 所以作为代数, $\text{End}_A({}_A A) \cong A^{\text{op}}$. $\square$

命题 1.2.4 设 A 是单代数, 且 $A \cong nI$, 其中 I 是不可约 A -模, 则

$$A \cong M^{n \times n}((\text{End}_A(I))^{\text{op}}).$$

证明 由引理 1.2.2 和命题 1.2.3 可知,

$$A \cong (\text{End}_A({}_A A))^{\text{op}} \cong (\text{End}_A(nI))^{\text{op}} \cong (M^{n \times n}(\text{End}_A(I)))^{\text{op}} \cong M^{n \times n}((\text{End}_A(I))^{\text{op}}),$$

其中, 最后一个同构由矩阵转置 $X \mapsto X^T$ 给出. $\square$

命题 1.2.5 设 D 是域 F 上的除环, 则矩阵代数 $M^{n \times n}(D)$ 是单代数.

证明 设 B 是 $M^{n \times n}(D)$ 的非零双边理想, E_{ij} 是第 i 行第 j 列的位置等于 1, 其余位置等于 0 的矩阵. 若在非零矩阵 $X \in B$ 中 $x_{kl} \neq 0$, 则 $E_{ij} = \frac{1}{x_{kl}} E_{ik} X E_{lj}$. 于是所有 E_{ij} 都在 B 中, 从而 $B = M^{n \times n}(D)$. $\square$

综合以上命题, 我们得到单代数的一些等价刻画.

定理 1.2.3 设 A 是有限维代数, 则下列条件等价:

- (1) A 是单代数;
- (2) A 是彼此同构的极小左理想的直和;
- (3) A 同构于某个除环 D 上的矩阵代数 $M^{n \times n}(D)$.

设 A 是半单结合代数, 则由前面的讨论得知 A 分解为一些不同构的单代数 A_k 的直和, 并且这些单代数 A_k 是彼此同构的极小左理想的直和. 于是我们有以下关于半单结合代数的结构定理. 由这个定理可以看出, 代数 A 是半单的当且仅当 A 是一些矩阵代数的直和.

定理 1.2.4 (Wedderburn (韦德伯恩)) 设 A 是半单结合代数, $I_1, \dots, I_r$ 是 A 的所有不同构不可约模, 且 ${}_A A \cong n_1 I_1 \oplus \dots \oplus n_r I_r$. 则

$$A \cong M^{n_1 \times n_1}(D_1) \oplus \dots \oplus M^{n_r \times n_r}(D_r).$$

其中 $D_k = (\text{End}_A(I_k))^{\text{op}}$.

证明 由引理 1.2.2 和 I_k 彼此不同构可知,

$$A \cong (\text{End}_A({}_A A))^{\text{op}} \cong (\text{End}_A(n_1 I_1))^{\text{op}} \oplus \dots \oplus (\text{End}_A(n_r I_r))^{\text{op}}.$$

对 $k = 1, 2, \dots, r$, $(\text{End}_A(n_k I_k))^{\text{op}} \cong M^{n_k \times n_k}((\text{End}_A(I_k))^{\text{op}})$. $\square$

推论 1.2.2 在定理 1.2.4 的条件下, 我们有 $\dim_F I_k = n_k \dim_F \text{End}_A(I_r)$, 且

$$\dim_F A = n_1^2 \dim_F \text{End}_A(I_1) + \cdots + n_r^2 \dim_F \text{End}_A(I_r).$$

证明 由 $I_k \cong \text{Hom}_A({}_A A, I_k) \cong \text{Hom}_A(n_k I_k, I_k) \cong n_k \text{End}_A(I_k)$, 可知

$$\dim_F I_k = n_k \dim_F \text{End}_A(I_r).$$

再由 $\dim_F M^{n_k \times n_k}((\text{End}_A(I_k))^{\text{op}}) = n_k^2 \dim_F \text{End}_A(I_k)$ 和定理 1.2.4 中的分解, 我们得到 $\dim_F A$ 的分解. $\square$

1.3 群代数的中心

设 A 是半单代数, 我们知道 A 可以分解为若干单理想 $A_1, \dots, A_s$ 的直和. 这些单理想的个数正是不同构的 A -不可约模的数目. 特别地

$$1_A = e_1 + \cdots + e_s,$$

其中 $e_k \in A_k$, $k = 1, \dots, s$. 与 1.2 节中关于左理想的讨论类似, 可以证明这些 e_k 都是幂等元. 进而对任意 $a \in A$, $ae_1 + \cdots + ae_s = a = e_1 a + \cdots + e_s a$. 根据这个分解是 (双边) 理想的直和分解, 可知对 $k = 1, \dots, s$, 都有 $ae_k = e_k a$, 即 e_k 是在 A 的中心 $Z(A)$ 里. 我们将 A 的中心中的幂等元称为**中心幂等元**.

容易看到, 中心幂等元 e_k 生成了理想 A_k , 即 $A_k = Ae_k = e_k A$, 并且 e_k 是 A_k 作为代数的单位元. 即对 $x \in A_k$, $xe_k = e_k x = x$. 从矩阵代数的观点来看, 每个单理想 Ae_k 均同构于某个矩阵代数 $M^{n \times n}(D_k)$, 故 A_k 的单位元 e_k 对应于这个矩阵代数中的单位矩阵. 由 $e_k e_j = \delta_{kj} e_k$, 可知 $e_1, \dots, e_s$ 是线性无关的.

对于群代数 $A = F[G]$, 它的中心 $Z(F[G])$ 还有一组线性无关的向量, 而且它们组成了中心的一组基, 它是由群 G 的共轭类给出的. 设 $C_1, \dots, C_r$ 是 G 的共轭类, 令 $c_k = \sum_{g \in C_k} g$. 由于共轭类不相交, 所以 $\{c_1, \dots, c_r\}$ 是线性无关的. 若 $h \in G$, 则

$$hc_k = \sum_{g \in C_k} hg = \left(\sum_{g \in C_k} hgh^{-1} \right) h = c_k h.$$

可见 $c_k \in Z(A)$. 若 $a = \sum_g a_g g \in Z(A)$, $a_g \in F$, 则由 $h^{-1}ah = a$ 可知, a 的分量系数满足 $a_{h^{-1}gh} = a_g$. 也就是说, 若 g 与 g' 共轭, 则它们对应的系数相等: $a_g = a_{g'}$. 从而 a 可以写成 $c_1, \dots, c_r$ 的线性组合. 因此 $\{c_1, \dots, c_r\}$ 是中心 $Z(A)$ 的一组基.

通过比较 $Z(F[G])$ 中这两组线性无关向量的个数, 我们得到群代数不可约模数目的上界.

命题 1.3.1 设群代数 $F[G]$ 是半单的, 则 $F[G]$ 的不同构不可约模的数目不超过 G 的共轭类的个数.

特别地, 在复数域 $\mathbb{C}$ 上, $D_k = (\text{End}_A(I_k))^{\text{op}} \cong \mathbb{C}$, 从而矩阵代数 $M^{n \times n}(D_k)$ 的中心为数量矩阵. 此时单代数 Ae_k 的中心是由 e_k 生成的 1 维线性空间. 所以群代数 $\mathbb{C}[G]$ 的中心还有一组基 $\{e_1, \dots, e_r\}$. 于是我们得到, $F[G]$ 的不同构不可约模的个数等于 G 的共轭类的个数.

1.4 中心化子

在本节中我们讨论半单代数的中心化子. 设 A 是 F 上的代数, M 是有限维 A -模. 我们有代数同态 $\rho: A \rightarrow \text{End}_F(M)$. 将

$$A'_M = \text{End}_A(M) = \{f \in \text{End}_F(M) \mid f \circ \rho(a) = \rho(a) \circ f, \forall a \in A\}$$

称为 A 在 $\text{End}_F(M)$ 中的中心化子, 简称中心化子, 在不引起混淆的情况下简记为 A' . 容易看到, A' 也是一个结合代数, 而且 M 成为 A' -模. 也就是对 $f \in A'$ 和 $v \in M$, $f \cdot v = f(v)$ 给出了 M 上的 A' -模结构. 由于 A' 是 $\text{End}_F(M)$ 的子代数, 故可以考虑它的中心化子. 将

$$A''_M := \text{End}_{A'}(M) = \{f \in \text{End}_F(M) \mid f \circ f' = f' \circ f, \forall f' \in A'\}$$

称为 A 的双中心化子, 简记为 A'' . 对 $a \in A$ 和 $f \in A'$, $f(av) = af(v)$, 可知 $f \circ \rho(a) = \rho(a) \circ f$. 也就是 $\rho(a) \in \text{End}_{A'}(M)$. 从而我们有代数同态 $\rho: A \rightarrow A''$. 因为 A 的单位元在 ρ 下对应 id_M , 所以 ρ 是非零同态. 一个自然的问题是这个问题是不是满的.

定理 1.4.1 (Jacobson (雅各森)) 设 M 是有限维完全可约 A -模. 则对 $f \in \text{End}_{A'}(M)$ 及 $v_1, \dots, v_n \in M$, 存在 $a \in A$ 使得对任何 $1 \leq i \leq n$, $f(v_i) = av_i$.

证明 我们先考虑 $n = 1$ 的情形. 此时对任意 $f \in \text{End}_{A'}(M)$ 和 $v \in M$, Av 是 M 的子模, 由 M 的完全可约性可知, 存在子模 W 使得 $M = Av \oplus W$. 令 $\pi: M \rightarrow Av$ 是自然投影, 则作为 A -模同态, π 与 f 可交换, 从而 $f(v) = f(\pi(v)) = \pi(f(v))$. 这表明 $f(v) \in \pi(M) = Av$, 从而存在 $a \in A$ 使得 $f(v) = av$.

若 $n \geq 2$, 令 $C_n = \text{End}_A(nM)$, 则与命题 1.2.3 类似可证, $C_n \cong M^{n \times n}(A')$. 设 $f \in \text{End}_{A'}(M)$, 考虑映射 $f_n: nM \rightarrow nM$, $f_n(v_1, \dots, v_n) = (f(v_1), \dots, f(v_n))$. 可直接验证 f_n 对应于 $M^{n \times n}(A')$ 中的对角矩阵. 从而与 C_n 中的元素交换, 故 $f_n \in \text{End}_{C_n}(nM)$.

由 $n = 1$ 时的结论, 存在 $a \in A$ 使得 $f_n(v_1, \dots, v_n) = a(v_1, \dots, v_n)$. 因此对任何 $i = 1, \dots, n$, $f(v_i) = av_i$. $\square$

在此定理中, 若 $v_1, \dots, v_n$ 是 M 的一组基, 则 A'' 的元素都是 av 的形式, 也就是说同态 $\rho: A \rightarrow A''$ 是满的. 特别地, 当 A 是半单代数且 ρ 是单射时, 可以将 A 看作 $\text{End}_F(M)$ 的子代数, 且 $A = A''$.

设 M 是有限维 A -模, I 是 A 的极小左理想, 则 $D = \text{End}_A(I)$ 是除环. 此时 A' 也是半单的.

命题 1.4.1 设 A 为半单代数, M 是有限维 A -模, 则 A' 是半单代数.

证明 设 $I_1, \dots, I_r$ 是 A 的所有彼此不同构的极小左理想, 维数分别为 $d_1, \dots, d_r$. 则 $M \cong m_1 I_1 \oplus \dots \oplus m_r I_r$, $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \text{End}_A(M) &\cong \text{End}_A(m_1 I_1) \oplus \dots \oplus \text{End}_A(m_r I_r) \\ &\cong M^{d_1 \times d_1}(\text{End}_A(I_1)) \oplus \dots \oplus M^{d_r \times d_r}(\text{End}_A(I_r)) \\ &\cong M^{d_1 \times d_1}(D_1) \oplus \dots \oplus M^{d_r \times d_r}(D_r). \end{aligned}$$

可见 $\text{End}_A(M)$ 是除环上的矩阵代数的直和, 从而是半单代数. $\square$

注意到 M 上也有中心化子 A' 的作用, 下面我们来分析 M 如何分解为不可约 A' -模的直和. 首先, I 是左 D -模, 而模同态空间 $\text{Hom}_A(I, M)$ 是右 D -模. 事实上, 对 $f \in \text{Hom}_A(I, M)$ 和 $d \in D$, 我们有 D 在 $\text{Hom}_A(I, M)$ 上的右作用: $fd := f \circ d$. 于是我们可以通过做模的张量积, 得到左 A -模 $\text{Hom}_A(I, M) \otimes_D I$.

命题 1.4.2 设 A 是半单代数, M 是有限维 A -模, $I_1, \dots, I_r$ 是 A 的所有彼此不同构的极小左理想, $D_k = \text{End}_A(I_k)$, 则

$$M \cong \text{Hom}_A(I_1, M) \otimes_{D_1} I_1 \oplus \dots \oplus \text{Hom}_A(I_r, M) \otimes_{D_r} I_r.$$

证明 令 $\Phi: \text{Hom}_A(I_1, M) \otimes_{D_1} I_1 \oplus \dots \oplus \text{Hom}_A(I_r, M) \otimes_{D_r} I_r \rightarrow M$ 为

$$\Phi((f_1 \otimes x_1, \dots, f_r \otimes x_r)) = f_1(x_1) + \dots + f_r(x_r).$$

由于 M 同构于 $I_1, \dots, I_r$ 的直和, 所以 Φ 是满同态. 设 $M \cong n_1 I_1 \oplus \dots \oplus n_r I_r$. 由于 I_k 是不可约 A -模, 故 $\text{Hom}_A(I_k, M) \cong n_k \text{Hom}_A(I_k, I_k)$ 作为右 D_k -模的维数是 n_k . 所以作为 F -线性空间,

$$\dim_F(\text{Hom}_A(I_k, M) \otimes_{D_k} I_k) = n_k \dim_F(I_k).$$

比较维数可知 Φ 是同构. $\square$

定理中的 $\text{Hom}_A(I, M)$ 是 A' -模. 设 $f \in \text{Hom}_A(I, M)$, $u \in A' = \text{End}_A(M)$, 则 A' 的作用为 $u(f) = u \circ f$. 下面我们证明 $\text{Hom}_A(I, M)$ 是 A' 的不可约模, 并且与 A 的极小左理想 I 一一对应.

命题 1.4.3 设 I_k 是 A 的极小左理想, 则 $\text{Hom}_A(I_k, M)$ 是不可约 A' -模. 若 I_j 是 A 的极小左理想, 且 $\text{Hom}_A(I_j, M)$ 和 $\text{Hom}_A(I_k, M)$ 是同构的 A' -模, 则 $I_k \cong I_j$.

证明 设 $f_1, f_2 \in \text{Hom}_A(I_k, M)$ 为非零 A' -模同态, 下面说明存在 $u \in A'$ 使得 $f_2 = u \circ f_1$. 设 P_1 为 $f_1(I_k)$ 的补模, 即 $M = f_1(I_k) \oplus P_1$. 由 I_k 是不可约 A -模, 可知 $f_1(I_k)$ 与 $f_2(I_k)$ 同构. 对 $x \in f_1(I_k)$ 和 $y \in P_1$, 令 $u(x + y) = f_2 \circ f_1^{-1}(x)$, 则 $u \in \text{End}_A(M, M)$, 且 $f_2 = u \circ f_1$. 因此 $\text{Hom}_A(I_k, M)$ 是不可约 A' -模.

设 $\varphi: \text{Hom}_A(I_k, M) \rightarrow \text{Hom}_A(I_j, M)$ 是 A' -模同构, $f \in \text{Hom}_A(I_k, M)$ 为非零 A -模同态. 于是 $f(I_k)$ 为 M 中与 I_k 同构的 A -子模. 令 $p \in A'$ 为从 M 到 $f(I_k)$ 的投影. 注意到 $\varphi(f)(I_j)$ 是 M 中与 I_j 同构的 A -子模, 且 $\varphi(f) = \varphi(p \circ f) = p \circ \varphi(f)$ (因为 φ 是 A' -模同态), 所以 $\varphi(f)(I_j)$ 在 p 的像中, 故 $\varphi(f)(I_j) = f(I_k)$. 因此 $I_k \cong I_j$. $\square$

由命题 1.4.2 和命题 1.4.3 可知,

$$\begin{aligned} M &\cong \text{Hom}_A(I_1, M) \otimes_{D_1} I_1 \oplus \cdots \oplus \text{Hom}_A(I_r, M) \otimes_{D_r} I_r \\ &\cong \dim_{D_1}(I_1) \text{Hom}_A(I_1, M) \oplus \cdots \oplus \dim_{D_r}(I_r) \text{Hom}_A(I_r, M) \end{aligned}$$

是 M 分解为不可约 A' -模的直和分解. 这样的分解体现了 A 和 A' 的对偶性. 它们互为中心化子. 并且它们的不可约表示之间有一一对应关系. 在 4.6 节中, 我们将运用中心化子的性质来讨论对称群与一般线性群之间的 Schur-Weyl 对偶.

习题

1. 证明命题 1.1.1.
2. 证明: 半单模的子模和商模都是半单的.
3. 设 A 是结合代数, e 是 A 中的幂等元, M 是 A -模, $\text{Hom}_A(Ae, M)$ 是从 Ae 到 M 的模同态组成的线性空间. 证明: $\text{Hom}_A(Ae, M)$ 作为线性空间同构于 eM .
4. 设 A 是 $\mathbb{C}$ 上的半单结合代数, I 是 A 的极小左理想. 证明: $\text{Hom}_A(I, A)$ 同构于 I 的对偶空间 I^* .
5. 将矩阵代数 $M^{n \times n}(F)$ 分解为极小左理想的直和.
6. 证明不可约分解的唯一性: 设 V 是代数 A 的模, 且 $V \cong n_1 V_1 \oplus \cdots \oplus n_r V_r$ 和 $V \cong m_1 V_1 \oplus \cdots \oplus m_s V_s$ 是 V 的两个不可约分解, 即 $V_1, \dots, V_r$ 是彼此不同构的不可约 A -模, $W_1, \dots, W_s$ 是彼此不同构的不可约 A -模, 则 $T = s$, 且存在置换 σ , 使得 $W_i = V_{\sigma(i)}$, $1 \leq i \leq s$.
7. 设 M 是代数 A 的模, $nM = \{(x_1, \dots, x_n)^T \mid x_1, \dots, x_n \in M\}$ 为 n 个 M 的

直和. 则 nM 是矩阵代数 $M^{n \times n}(A)$ 的模. 证明: nM 是不可约 $M^{n \times n}(A)$ -模当且仅当 M 是不可约 A -模.

8. 设 D 是除环. 证明: 矩阵代数 $M^{n \times n}(D)$ 的中心为 $\{z \cdot I_n \mid z \in Z(D)\}$, 其中 $Z(D)$ 是 D 的中心.

9. 设 $s = c_1 e_1 + \cdots + c_k e_k$ 为代数 A 的元素, 其中 $c_1, \cdots, c_k \in F$, $e_1, \cdots, e_k$ 是 A 的两两正交的幂等元. 则对 $i = 1, \cdots, k$, 存在多项式 $p_i(x) \in F[x]$, 使得 $e_i = p_i(s)$.

10. 设 G 是有限群, 证明: 对任意 $a \in \mathbb{C}[G]$, 方程 $axa = a$ 在 $\mathbb{C}[G]$ 有解.

11. 证明: 由等式

$$xy = f(x, y)e + \sum_{g \neq e} a_g g, \quad x, y \in F[G], a_g \in F$$

定义的函数 $f(x, y)$ 是群代数 $F[G]$ 上的对称双线性函数, 并且 f 的核是 $F[G]$ 的理想.

12. 求 3 个有限群, 使得其群代数 $\mathbb{C}[G]$ 分别是 1, 2, 3 个矩阵代数的直和.

13. 设 G 是有限群, 群代数 $\mathbb{C}[G]$ 没有幂零元, 证明: G 是交换群.

14. 将群代数 $\mathbb{C}[Q_8]$ 分解为极小左理想的直和, 以及理想的直和.

15. 设 H 是有限群 G 的子群, 证明:

(1) $\frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h$ 是群代数 $F[H]$ 的幂等元;

(2) $\frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h$ 是 $F[H]$ 的中心幂等元当且仅当 H 是 G 的正规子群.