

前 言

概率论研究随机现象的内在规律性并发展相应的数学理论。描述随机现象的基本概念是随机变量和随机过程。随机现象是相对于决定性现象而言的，后者是指在一定条件下必然产生某种结果的现象。随机现象则是指在基本条件不变的情况下，不能肯定最终会出现哪种结果的现象，即其结果的出现具有偶然性。随机现象的产生和对它的观察构成了概率论中所说的随机试验。虽然一次随机试验中某个事件的发生与否带有偶然性，在相同条件下大量重复的随机试验却往往呈现出明显的规律性。

如何把概率论建立在严格的数学基础之上曾经是该学科发展中的主要困难之一，对此问题的探索持续了相当长的时间。柯尔莫哥洛夫在他 1933 年出版的《概率论基础》一书中建立了概率论的严格的公理化体系。他的公理化方法是现代概率论的基础，使之成为严谨的数学分支，有力地推动了该学科的发展。

20 世纪初，受物理等学科的影响，人们开始深入地研究描述随机现象随时间演化的随机过程。爱因斯坦和维纳等对于布朗运动的研究推动了随机过程理论早期的发展。对该理论做出奠基性贡献的学者包括柯尔莫哥洛夫、马尔可夫、辛钦、维纳、莱维、伊藤等。目前概率论的思想和方法已经渗透到自然科学、工程技术、社会科学各个领域。概率论已成为大学各专业开设最为广泛的数学课程之一。

本套《概率论》教材为大学数学类专业概率论课程设计，基于尽量少的预备知识，介绍该学科的基本概念、工具和方法。教材分为上、下两册；上册讲授概率论基础知识，包括概率空间、随机变量、条件分布与独立性、数学期望、特征函数、概率极限定理等；下册是关于随机过程和随机分析的引论，包括随机过程和鞅论的基本结果、更新过程、离散时间马氏链、连续时间马氏过程、随机积分和应用等。这些内容涵盖了教育部本科教育教学改革试点工作计划（“101 计划”）《高等学校数学类专业人才培养战略研究报告暨核心课程体系》中所列的概率论课程知识要点。与国际上流行的同类教材相比，本教材的难度介于文献 [9] 和 [13] 之间，大致与 [15] 相当，但内容与上述教材有很大不同。

在内容的处理上，我们力求简明精练、深入浅出，对于概念和结论的阐述都

是严格和准确的。个别结论的证明中引入了附加条件,以便使学生既能够通过证明理解结论为什么是正确的,又不至陷入过于烦琐的技术性推演。对于数学期望,书中采用的是比较易于理解的斯蒂尔切斯积分的处理方式。为了方便师生的教和学,我们对该积分给出了较为系统的介绍,包括有界区间上的积分、全欧氏空间上的积分、极限与积分的换序等。这使我们在后面关于特征函数和各种概率极限定理等的讨论中,可以给出相对完整的一般性证明,而不必过多地引用关于抽象测度与积分的结果。

教材重视教学内容的现代化,并适当反映学科的发展情况,基本理论部分吸纳了若干新的结果和处理手法。特别地,对于随机过程讨论了左极右连实现和左极右连修正存在性的等价关系。对于柯尔莫哥洛夫强大数定律的证明,书中采用了比柯氏不等式方法更为简短的加西亚极大不等式方法。对于独立同分布随机变量序列的中心极限定理,书中分别给出了基于特征函数方法和基于斯坦方法的两重证明。结合马氏链和莱维过程的讨论,介绍了马氏耦合方法。对于连续时间马氏链,通过泊松随机测度驱动的随机方程给出了极小链的构造,这显示了随机分析方法的广泛的适用性。此外,书中通过专题讨论,例题和习题等形式介绍或提及了若干活跃的研究课题,如伊辛模型、自旋玻璃、分支结构系统等。

教材的上册通过对频率稳定性,高尔顿钉板试验等典型现象或案例的讨论导入,激发学生对于随机现象的相关问题的探索兴趣,最后又回到这些问题,用概率极限定理对其中的科学规律给出严格的分析和解释。希望学生通过对比自己对这些现象或案例理解程度的变化,认识到概率论在随机现象研究中的重要作用。作为对正文内容的扩展,在上册的附录中讨论了集合形式的单调类定理和关于抽象测度的积分,可供在需要时查阅。下册第一、二章分别介绍随机过程和鞅论的基本结果,后面各章围绕离散状态过程和连续状态过程两条主线展开,在内容的处理上有较大的独立性,以增加教学的灵活度。根据课时等实际情况,教师可以对书中的内容进行适当的选择。例如,下册可选择只讲授第一、二、四、五、六、七章,或者只讲授第一、二、四、八、九章。另外,跳过标题后带“*”号的内容不会影响后面内容的教学。

本书的材料来源于作者的课程讲义。我们感谢多位同行朋友对书稿在内容选取,编排设计等方面给予的有益建议;感谢历届同学在学习过程中富有启发性的问题;感谢高等教育出版社非常认真的编校工作。欢迎各位同仁继续对教材中的疏漏和谬误之处给予批评和指正。

作者

2024年6月