第一章

度量空间

1.1　度量空间

度量空间是现代数学最重要的概念之一. 法国数学家 M. Fréchet (弗雷歇) 于 1906 年首次抽象地研究度量空间的一般性质.

定义与例子

定义 1.1.1 (度量空间)　设 X 是一个非空集合, 若对于 X 中任意两个元素 x, y, 都有一个实数 $d(x,y)$ 与它们对应, 而且满足下面条件:

(i) **(非负性与正定性)**　对任意 $x, y \in X$, $d(x,y) \geqslant 0$, 并且 $d(x,y)=0$ 的充要条件是 $x=y$;

(ii) **(对称性)**　对任意 $x, y \in X$, $d(x,y)=d(y,x)$;

(iii) **(三角不等式)**　对任意 $x, y, z \in X$, $d(x,y) \leqslant d(x,z)+d(z,y)$,

则称 (X,d) 是一个**度量空间** (或**距离空间**), d 为 X 上的**度量** (或**距离**), $d(x,y)$ 为**点** x, y **之间的距离**.

例 1.1.1　在直线 $\mathbb{R}$ 上, 定义

$$d(x,y)=|x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

则 $(\mathbb{R}, d)$ 是度量空间.

例 1.1.2　在 n 个有序实数组 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 全体组成的集合 X 中, 定义

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2},$$

则 (X,d) 是度量空间, 称为 n **维 Euclid (欧几里得) 空间**, 通常记为 $\mathbb{R}^n$.

它是下面例子在 $p=2$ 情况的特例.

例 1.1.3　固定 $p \geqslant 1$. 在 n 个有序实数组构成的集合 X 中, 定义

$$d_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.1}$$

那么 (X, d_p) 是度量空间, 记为 $\mathbb{R}_p^n$.

要证明 d_p 是一个度量, 我们只需要验证三角不等式.

设 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in X$, 令 $a_i = x_i-y_i, b_i=y_i-z_i (i=1,2,\cdots)$. 三角不等式就化成

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.2}$$

当 $p=1$ 时, 上式显然成立. 当 $p>1$ 时, 它可以由下面的不等式推出: 令 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.3}$$

它们可看作下面 Minkowski (闵可夫斯基) 不等式和 Hölder (赫尔德) 不等式的特例.

对于 Lebesgue (勒贝格) 测度空间 $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}m)$ 中的可测集 E 和其上的 Lebesgue 可测函数 f,g, 若 $|f|^p, |g|^q$ 是可积的, 其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, 1<p,q<\infty$, Hölder 不等式是说 fg 可积且

$$\left|\int_E f(t)g(t)\mathrm{d}m(t)\right| \leqslant \left(\int_E |f(t)|^p\,\mathrm{d}m(t)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E |g(t)|^q\,\mathrm{d}m(t)\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.4}$$

为了证明 Hölder 不等式, 注意到不等式 (1.4) 是齐次的. 这意味着, 如果不等式 (1.4) 对于可测函数 f,g 成立, 那么它对于 λf 与 μg (其中 λ 与 μ 是任意数) 也成立. 因此, 只要证明不等式 (1.4) 在

$$\int_E |f(t)|^p\,\mathrm{d}m(t) = \int_E |g(t)|^q\,\mathrm{d}m(t) = 1 \tag{1.5}$$

的条件下成立就可以了.

为了证明此时的 Hölder 不等式, 我们可以使用 Young (杨) 不等式: 当 $a,b>0$ 时,

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

Young 不等式可由微积分中凸函数的办法证明: 由于 $f(x)=-\ln x$ 是凸函数, 故

$$-\ln\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right) \leqslant \frac{-\ln(a^p)}{p}+\frac{-\ln(b^q)}{q},$$

整理上式即得 Young 不等式, 并且不等式的等号成立当且仅当 $a^p=b^q$. 由 Young 不等式即得

$$|f(t)g(t)| \leqslant \frac{|f(t)|^p}{p}+\frac{|g(t)|^q}{q}, \quad \forall t\in E.$$

从而

$$\left|\int_E f(t)g(t)\mathrm{d}m(t)\right| \leqslant \int_E |f(t)g(t)|\,\mathrm{d}m(t) \leqslant \int_E\left[\frac{|f(t)|^p}{p}+\frac{|g(t)|^q}{q}\right]\mathrm{d}m(t) = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

这就得到了 Hölder 不等式. 从证明中也可以看到, 不等式的等号成立当且仅当 fg 几乎处处符号不变, 且存在不全为零的常数 a,b 使得 $a|f(t)|^p$ 几乎处处等于 $b|g(t)|^q$.

现在, 我们证明 Minkowski 不等式: 对于数 $p\geqslant 1$, 若 E 上可测函数 f,g 是 p 次可

积的, 则

$$\left(\int_E |f(t)+g(t)|^p \,\mathrm{d}m(t)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_E |f(t)|^p \,\mathrm{d}m(t)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(t)|^p \,\mathrm{d}m(t)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.6}$$

显然只需讨论 $p>1$ 的情况. 由 Hölder 不等式,

$$\begin{aligned}
&\int_E |f(t)+g(t)|^p \,\mathrm{d}m(t)\\
=&\int_E |f(t)+g(t)|^{p-1}\cdot|f(t)+g(t)|\,\mathrm{d}m(t)\\
\leqslant&\int_E |f(t)+g(t)|^{p-1}\cdot|f(t)|\,\mathrm{d}m(t)+\int_E |f(t)+g(t)|^{p-1}\cdot|g(t)|\,\mathrm{d}m(t)\\
\leqslant&\left(\int_E |f(t)+g(t)|^{(p-1)q}\,\mathrm{d}m(t)\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\int_E |f(t)|^p \,\mathrm{d}m(t)\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E |g(t)|^p \,\mathrm{d}m(t)\right)^{\frac{1}{p}}\right].
\end{aligned}$$

注意到 $(p-1)q=p$, 就得到 Minkowski 不等式. 并且, 不等式的等号成立当且仅当存在数 a,b 使得 $ag \underset{m}{\doteq} bf$ (即 ag 几乎处处等于 bf).

在区间 $E=(0,n]$ 上, 定义函数 f,g 为 $f(x)=a_i, g(x)=b_i(\forall x\in(i-1,i])$, 它们都是 Lebesgue 可测的. 容易验证, 此时的 Minkowski 不等式和 Hölder 不等式可分别转化为不等式 (1.2) 与不等式 (1.3).

特殊情形 $p=1$ 即为下面常用的度量.

例 1.1.4 考虑同样的 n 个有序实数组全体构成的集合 X, 其中的距离由

$$d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

定义. $\mathbb{R}_1^n=(X,d_1)$ 也是度量空间.

例 1.1.5 再取 n 个有序实数组全体构成的集合 X, 而其元素之间的距离由公式

$$d_\infty(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|$$

给出. $\mathbb{R}_\infty^n=(X,d_\infty)$ 是度量空间.

上面的例子表明在同一个集合中, 可以引进不同的度量, 得到不同的度量空间.

例 1.1.6 在闭区间 $[a,b]$ 上的一切连续实 (或复) 值函数的集 $C[a,b]$ 中, 定义

$$d(f,g)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)-g(t)|. \tag{1.7}$$

它是 $C[a,b]$ 上的度量. 此空间在分析学中起着极为重要的作用. 我们也用此空间点集的同样记号 $C[a,b]$ 来记它.

例 1.1.7 (平凡的例子) 设 X 是一个非空的集合, 定义如下的度量:

$$d_0(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y.\end{cases}$$

使用集合的操作, 我们可以从原有的度量空间构造出新的度量空间. 设 (X,d) 是度量空间, A 是 X 的非空子集. 若对于 A 中的任意两点 $x,y\in A$, 规定

$$d_A(x,y)=d(x,y),$$

则 (A,d_A) 是度量空间, 称为 (X,d) 的一个**子空间**. 用这种方法可以给出无穷多的例子.

Descartes (笛卡儿) 乘积也是一个常用的构造方式. 设 $(X_1,d_1),(X_2,d_2)$ 是两个度量空间, 集

$$X=X_1\times X_2=\{(x_1,x_2)\colon x_1\in X_1,x_2\in X_2\}$$

是 X_1,X_2 的乘积空间. 在 X 上可以赋予多个合理的度量, 例如我们可以用以下三个式子之一来定义度量:

$$\begin{aligned}d_2((x_1,x_2),(y_1,y_2))&=\sqrt{d_1^2(x_1,y_1)+d_2^2(x_2,y_2)},\\ d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2))&=d_1(x_1,y_1)+d_2(x_2,y_2),\\ d_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2))&=\max\{d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2)\}.\end{aligned}$$

极限

定义 1.1.2 (极限) *设 (X,d) 是度量空间, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 X 中点列, $x_0\in X$, 若*

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_0)=0.$$

*则称***点列** $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ **按照度量** d **收敛于** x_0, *记为* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

对于度量空间 (X,d) 中的点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, 如果对于任何正数 ε, 存在正整数 N, 使得当 $n,m\geqslant N$ 时,

$$d(x_n,x_m)<\varepsilon,$$

就称 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 X 中的**基本点列**, 或者称为 **Cauchy (柯西) 点列**. 显然收敛点列必然是基本点列. 如果 X 中任何基本点列都收敛于 X 中的点, 就称 (X,d) 为**完备**的度量空间.

例 1.1.8 例 1.1.1 中的度量空间 $(\mathbb{R},d)$ 的完备性即为实数理论中的 Cauchy 收敛原理.

例 1.1.9 考虑例 1.1.2, 例 1.1.4 及例 1.1.5, 在 n 个有序实数组全体构成的集合 X 中, 点列 $\{x^{(k)}\}$ 按度量 d, d_1 或 d_∞ 收敛于 $x^{(0)}$ 都等价于 $\{x^{(k)}\}$ 按坐标收敛于 $x^{(0)}$, 即每个分量 $\{x_i^{(k)}\}$ 收敛于 $x_i^{(0)}$, 这里 $i=1,2,\cdots,n$. 因此, 度量空间 (X,d), (X,d_1) 及 (X,d_∞) 中的收敛性是等价的. 同时, 点列 $\{x^{(k)}\}$ 按度量 d, d_1 或 d_∞ 是 Cauchy 收敛的, 等价于每个分量 $\{x_i^{(k)}\}$, $(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 点列. 由例 1.1.8 知, X 在度

量 d, d_1 或 d_∞ 下均是完备的.

例 1.1.10　考虑例 1.1.6, $C[a,b]$ 是完备的度量空间.

证明　设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $C[a,b]$ 中的基本点列, 即对任何正数 ε, 存在 $N>0$, 使得当 $n,m \geqslant N$ 时,

$$d(f_n,f_m)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon.$$

从而, 对于任何 $x\in[a,b]$, 只要 $n,m\geqslant N$, 就有

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon. \tag{1.8}$$

这也就是说, $\{f_n(x)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个 Cauchy 点列. 因此 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 $[a,b]$ 上点态收敛于函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. 再在 (1.8) 式中令 $m\to\infty$, 可得当 $n\geqslant N$ 时, $|f_n(x)-f(x)|\leqslant \varepsilon(\forall x\in[a,b])$. 这就说明, f 是 f_n 的一致收敛极限, 从而 $f\in C[a,b]$, 并且 $d(f_n,f)\to 0$.

□

由上面的讨论可知, $C[a,b]$ 中点列按度量 d 收敛等价于区间 $[a,b]$ 上的函数列一致收敛. 然而, 可以证明 $[a,b]$ 上的函数列的点态收敛却是不可度量化的 (对拓扑理论熟悉的读者可自行思索).

例 1.1.11　设 (X,d) 是度量空间, 我们还可以在 X 上定义新的度量

$$d'(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)},\quad \forall x,y\in X$$

和

$$d''(x,y)=\ln(1+d(x,y)),\quad \forall x,y\in X.$$

它们是不同的度量. 但是容易验证, 对于空间 X 中的点列 $\{x_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n \overset{d}{=} x_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \overset{d'}{=} x_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \overset{d''}{=} x_0.$$

例 1.1.12　对于有限区间 $[a,b]$, 记 $\mathfrak{S}=\{[a,b]$ 上几乎处处有限的 Lebesgue 可测函数$\}$. $\mathfrak{S}$ 中两个函数 f,g 是等价的, 是指它们满足 $f \underset{m}{\doteq} g$. 仍以 f 来表示 Lebesgue 可测函数 f 在 $\mathcal{S}=\mathfrak{S}/\sim$ 中对应的等价类. 对于 $f,g\in\mathcal{S}$, 定义

$$d(f,g)=\int_{[a,b]}\frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}\mathrm{d}m(t).$$

容易验证这是一个度量. 进而成立:

(i) 若有 $d(f,f_n)\to 0$, 则对于任意的 $\varepsilon>0$,

$$\begin{aligned} m(|f_n-f|\geqslant\varepsilon) &= m\left(\frac{|f-f_n|}{1+|f-f_n|}\geqslant\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\\ &\leqslant \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\int_{[a,b]}\frac{|f-f_n|}{1+|f-f_n|}\mathrm{d}m\to 0.\end{aligned}$$

即 f_n 依测度收敛到 f.

(ii) 反之, 若 f_n 依测度收敛到 f, 则 $\dfrac{|f-f_n|}{1+|f-f_n|}$ 依测度收敛到 0. 由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} d(f,f_n) &= \lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}\frac{|f-f_n|}{1+|f-f_n|}\mathrm{d}m\\ &= \int_{[a,b]}\lim_{n\to\infty}\frac{|f-f_n|}{1+|f-f_n|}\mathrm{d}m\\ &= 0.\end{aligned}$$

也就是说, $[a,b]$ 上可测函数列的依测度收敛等价于 $\mathcal{S}$ 中按照度量 d 的收敛. 使用类似于 (i) 的讨论可以说明若 $(\mathcal{S},d)$ 中点列 $\{f_n\}$ 是 Cauchy 收敛的, 则函数列 f_n 是依测度 Cauchy 收敛的. 取可测函数 f 使得 f_n 依测度收敛于 f, 再由 (ii) 的讨论可知 $\{f_n\}$ 依度量收敛于 f. 从而度量空间 $(\mathcal{S},d)$ 是完备的.

例 1.1.13 在空间 $\mathbb{R}^\infty=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots): x_n\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}_+\}$ 中, 定义度量

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}.$$

那么 $(\mathbb{R}^\infty,d)$ 是一个度量空间. 并且 $(\mathbb{R}^\infty,d)$ 中的点列 $\left\{x^{(k)}\right\}$ 收敛于 $\left\{x^{(0)}\right\}$ 等价于其按坐标收敛, 即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_n^{(k)}=x_n^{(0)}(n=1,2,\cdots)$. 从而也可得到 $(\mathbb{R}^\infty,d)$ 是一个完备的度量空间.

证明 容易验证 $(\mathbb{R}^\infty,d)$ 是度量空间. 我们来分析它上面的收敛性. 如果点列 $x^{(k)}$ 按度量 d 收敛于 $x^{(0)}$, 那么对任意正整数 n, 坐标分量满足

$$\frac{\left|x_n^{(k)}-x_n^{(0)}\right|}{1+\left|x_n^{(k)}-x_n^{(0)}\right|}\leqslant 2^n d(x^{(k)},x^{(0)}),$$

由 $\lim\limits_{k\to\infty} d(x^{(k)},x^{(0)})=0$ 易得

$$\lim_{k\to\infty}|x_n^{(k)}-x_n^{(0)}|=0.$$

反之, 若点列 $x^{(k)}$ 的每个坐标 $x_n^{(k)}$ 收敛于 $x^{(0)}$ 的坐标 $x_n^{(0)}$, 则由控制收敛定理可得 (请读者思考为什么)

$$\lim_{k\to\infty} d(x^{(k)},x^{(0)})=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\left|x_n^{(k)}-x_n^{(0)}\right|}{1+\left|x_n^{(k)}-x_n^{(0)}\right|}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{\left|x_n^{(k)}-x_n^{(0)}\right|}{1+\left|x_n^{(k)}-x_n^{(0)}\right|}=0.$$

因此, $(\mathbb{R}^\infty,d)$ 中的点列 $\left\{x^{(k)}\right\}$ 收敛于 $\left\{x^{(0)}\right\}$ 等价于其按坐标收敛. 类似地, 点列 $\left\{x^{(k)}\right\}$ 是基本的等价于每个坐标 $\left\{x_n^{(k)}\right\}$ 都是 $\mathbb{R}$ 中的基本列. 再使用 $\mathbb{R}$ 的完备性, 就可以说明

$(\mathbb{R}^\infty, d)$ 也是完备的. □

例 1.1.14 设 Ω 是复平面中的开集, 记 $H(\Omega)$ 为 Ω 上全纯函数全体构成的集合. 我们将在 $H(\Omega)$ 上构造度量来刻画 Ω 上函数列的内闭一致收敛.

取 Ω 中单调递增的紧集族 K_n, 使得 K_n 的内部 U_n 满足 $\bigcup\limits_n U_n = \Omega$. 定义

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\max\limits_{x\in K_n} |f(x)-g(x)|}{1+\max\limits_{x\in K_n} |f(x)-g(x)|}.$$

容易看出 d 是一个度量, 并且 $d(f_n, f) \to 0$ 当且仅当 f_n 内闭一致收敛于 f.

最后, 我们给出度量空间的一个非常简单的收敛性质.

命题 1.1.1 在度量空间 (X,d) 中, 收敛点列 $\{x_n\}$ 的极限是唯一的.

证明 设 x, y 都是 $\{x_n\}$ 的极限, 则

$$0 \leqslant d(x,y) \leqslant d(x,x_n) + d(y,x_n).$$

令 $n \to \infty$ 得 $d(x,y) = 0$, 因此 $x = y$. □

这一性质给出了可测函数列依测度收敛、序列按坐标收敛以及解析函数列内闭一致收敛的极限唯一性的统一处理.

习题 1.1

1. 在 $l^2 = \{$数列 $x = (x_1, x_2, \cdots) : \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty\}$ 上, 令

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x, y \in l^2.$$

   证明 d 是 l^2 上的度量. 若 $\{x^{(m)}\}$ 是 l^2 中点列, $x^{(0)} \in l^2$, 证明: 如果 $\lim\limits_{m\to\infty} d(x^{(m)}, x^{(0)}) = 0$, 那么对于任何 k, $\lim\limits_{m\to\infty} \left|x_k^{(m)} - x_k^{(0)}\right| = 0$. 并举例说明逆命题不正确.
2. 设 (X,d) 是度量空间, 证明: 例 1.1.11 引进的 d' 和 d'' 也是 X 上的度量, 并且 (X,d'), (X,d'') 中点列的收敛性和在 (X,d) 中是一致的.
3. 若度量空间 (X,d) 中点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 分别收敛于点 x, y, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x,y).$$

4. 设 X 是 $[0,1]$ 上多项式全体. 对于 $P, Q \in X$, $P(x) - Q(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, 令

$$d_1(P,Q) = \max_{x\in[0,1]} |P(x) - Q(x)|,$$

$$d_2(P,Q)=\sum_{i=0}^{n}|a_i|\,.$$

证明:

(i) d_1,d_2 都是 X 上的度量.

(ii) 多项式按 d_1 收敛等价于在 $[0,1]$ 上一致收敛于某一多项式.

(iii) 按 d_2 收敛可以推出按 d_1 收敛, 但反之不真 (即存在多项式列 $\{P_k\}$, $d_1(P_k,0)\to 0$, 但 $d_2(P_k,0)\not\to 0$).

5. 对 $0<p<1$, 记 $\mathcal{L}^p[0,1]$ 是区间 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可测且 p 次可积的函数全体. 令

$$d(f,g)=\int_0^1|f(t)-g(t)|^p\,\mathrm{d}t.$$

证明:

(i) 当数 $a,b>0$ 时, $(a+b)^p\leqslant a^p+b^p$.

(ii) d 是伪度量, 即 d 是非负的且满足定义 1.1.1(ii) 及 (iii).

(iii) 若等价关系 $f\sim g$ 是指两个函数 f,g 满足 $f\underset{m}{\doteq}g$, 仍以 f 来表示 p 次可积函数 f 在 $L^p[a,b]=\mathcal{L}^p[a,b]/\sim$ 中对应的等价类, 则 $(L^p[a,b],d)$ 是度量空间.

6. 图 $G=(V,E)$ 是指如下的集合对: V 是一个点集, E 是 $V\times V\backslash\{(x,x):x\in V\}$ 的子集, 且当 $(x,y)\in E$ 时, $(y,x)\in E$. 称 V 是顶点集, V 中元素称为顶点; 称 E 为边集, E 中元素称为边. 如果两个顶点有一条边相连, 即 $(x,y)\in E$, 那么称它们为邻居 (neighbour), 记为 $x\sim y$. 如果 V 中任意两点 x,y 之间, 都存在一条路径 $x=z_0\sim z_1\sim\cdots\sim z_n=y$ 连接 x,y, 就称图是连通的. 对 V 上不同两点 x,y, 令

$$d(x,y)=\min\{n:\text{存在路径}x=z_0\sim z_1\sim\cdots\sim z_n=y\},$$

并定义 $d(x,x)=0$. 证明: 对于连通图 G, (V,d) 是一个度量空间.

7. 在三维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 考虑单位球面

$$S^2=\left\{x\in\mathbb{R}^3\colon x=(x_1,x_2,x_3),x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\right\}.$$

对于 $x,y\in S^2$, 规定 $d(x,y)$ 为过 x,y 两点的大圆上以 x,y 为端点的劣弧的弧长, 它在三维 Euclid 空间的正交变换下是保持不变的.

(i) 对于 $x_1^2+x_2^2=1$, 计算 $d((1,0,0),(x_1,x_2,0))$.

(ii) 如果用 $\rho(x,y)$ 表示 Euclid 距离, 证明:

$$\rho(x,y)\leqslant d(x,y)\leqslant\tfrac{\pi}{2}\rho(x,y).$$

(iii) 证明: d 是 S^2 上的度量.

8. 证明: 例 1.1.14 中的 d 是一个度量, 并且 $d(f_n,f)\to 0$ 当且仅当 f_n 内闭一致收敛于 f.

9. 对复数 $z,|z|<1$, 由复分析知识 $\psi_z(w)=\dfrac{w-z}{1-\bar{z}w}$ 是复平面单位圆盘 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ 的解析自同构. 令

$$d(z,w)=\ln\frac{1+|\psi_z(w)|}{1-|\psi_z(w)|}.$$

(i) 对于 $a,z,w\in\mathbb{D}$, 证明: $d(z,w)=d(\psi_a(z),\psi_a(w))$.

(ii) 证明: d 是 $\mathbb{D}$ 上的一个度量 (称为 Poincaré (庞加莱) 度量).

(iii) 画出 $B\left(\frac{1}{2}, 10\right) = \{w \in \mathbb{D} : d\left(\frac{1}{2}, w\right) \leqslant 10\}$ 的示意图.

10. 称群 G 是有限生成的, 是指存在 G 中不含单位元 e 的有限子集 S, 使得

$$\forall x \in G, \exists n \in \mathbb{N}, \varepsilon_i = \pm 1, s_i \in S, \text{ 使得 } x = s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \cdots s_n^{\varepsilon_n}.$$

此时称 S 为 G 的一个生成集.

(i) 对于群 G 及其有限生成集 S, 它产生了一个 Cayley (凯莱) 图 $\varGamma = (G, E)$, 这里 $G \times G$ 中元素 $(x, y) \in E$ 当且仅当存在 $g \in S$ 使得 $xg = y$ 或者 $xg^{-1} = y$. 证明: Cayley 图是连通图.

我们将这个 Cayley 图所给出的 G 的度量记作 d_S (见题 6): 对于 $u, v \in G$,

$$d_S(u, v) = \min\{n \in \mathbb{N} : \exists \varepsilon_i = \pm 1, s_i \in S \text{ 使得 } v = u s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \cdots s_n^{\varepsilon_n}\}.$$

(ii) 证明: d_S 是 G–(左作用) 不变度量, 即

$$d_S(x, y) = d_S(gx, gy), \quad \forall x, y, g \in G.$$

(iii) 若 S_1, S_2 是 G 的两个生成集. 证明: 度量 d_{S_1}, d_{S_2} 是等价的, 即存在正数 C_1, C_2 使得

$$C_1 d_{S_1}(x, y) \leqslant d_{S_2}(x, y) \leqslant C_2 d_{S_1}(x, y), \quad \forall x, y \in G.$$

(iv) 自由群 $\mathbb{F}_2$ 定义如下: 它由两个元素 a, b 生成, 其中的元素为由 a, b 排列成的单词

$$s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \cdots s_n^{\varepsilon_n}, \text{ 其中 } n = 0, 1, 2, \cdots, \varepsilon_i = \pm 1, s_i \in \{a, b\};$$

词 w, v 的乘法定义为 wv, 且当 a 与 a^{-1} 或 b 与 b^{-1} 相邻时消除; 当 $n = 0$ 时的单词记为 e, 它是 $\mathbb{F}_2$ 的单位元. 画出 $\mathbb{F}_2$ 关于生成集 $\{a, b\}$ 的 Cayley 图的示意图.

1.2 赋范线性空间及内积空间

我们在高等代数课程中已经接触到了线性空间的概念, 在这里, 我们首先回顾一些重要的线性空间的例子 (特别是一些自然的无限维线性空间).

线性空间

为了验证一个集合是实 (或复) 线性空间, 我们需要验证在这个集合上有一个满足交换律以及结合律的二元运算 (加法), 以及一个实 (或复) 数乘运算.

例 1.2.1 所有 n 个有序实数组 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 构成的集合是线性空间, 其中

加法与数乘运算按下列公式定义:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n);$$
$$\alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n).$$

这个空间记作 $\mathbb{R}^n$. 类似地, 复线性空间 $\mathbb{C}^n$ 定义为所有 n 个有序复数组 (具有复数数乘运算) 构成的线性空间.

例 1.2.2 (函数空间) 设 S 是集合, $\mathcal{F}$ 是 S 上某些实 (或复) 函数所成的函数族. 在函数族中, 我们按通常方法规定加法运算及数乘运算如下:

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s), \quad \forall f, g \in \mathcal{F}, s \in S;$$
$$(\alpha f)(s) = \alpha f(s), \quad \forall f \in \mathcal{F}, s \in S, \alpha \text{ 是数}.$$

如果当 $f, g \in \mathcal{F}$, α, β 是任意实 (或复) 数时,

$$\alpha f + \beta g \in \mathcal{F},$$

那么 $\mathcal{F}$ 成为一个线性空间. 以后如果不另外说明, 函数空间总是采取上述的加法及数乘运算. S 上的实值函数全体成为实空间, 而复值函数全体成为复空间.

例 1.2.3 (i) $C(E)$: $\mathbb{R}^n$ 中子集 E 上的连续实 (或复) 函数全体, 这是分析学中最重要的空间之一.

(ii) $P[x]$: 一元多项式 $p(x)$ 全体.

(iii) $B[a, b]$: 区间 $[a, b]$ 上有界函数全体.

(iv) $C^\infty(U)$, $C_c(U)$ 与 $C_c^\infty(U)$: 对于 $\mathbb{R}^n$ 中开集 U, 其上的无限次可微函数全体记为 $C^\infty(U)$. 对于 U 中函数 f, 若它的支撑集

$$\operatorname{supp} f \xlongequal{\text{def}} \text{子集 } \{x \in U : f(x) \neq 0\} \text{ 在 } \mathbb{R}^n \text{ 中的闭包}$$

是 U 的一个紧子集, 则称 f 是紧支撑的. U 上紧支撑的连续函数全体记作 $C_c(U)$. 对于 $C_c(U)$ 中一个函数 f, 如果延拓定义 f 在 U 外的值总为零, 那么可以将其视为 $C_c(\mathbb{R}^n)$ 中的一个元素. 令 $C_c^\infty(U) = C_c(U) \cap C^\infty(U)$ 为无限次可微的紧支撑函数. 利用零延拓可将 $C_c^\infty(U)$ 视为 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的一个线性子空间.

这些都是函数空间的例子.

例 1.2.4 (i) $\mathbb{R}^\infty$: 数列 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ 全体, 按坐标进行加法和数乘运算, 即

$$(x_1, x_2, \cdots) + (y_1, y_2, \cdots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots);$$
$$\alpha(x_1, x_2, \cdots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots).$$

是线性空间. 我们也可以将它看成正整数集合 $\mathbb{N}_+$ 上的函数空间. 如果 f 是 $\mathbb{N}_+$ 上的一个函数, 那么它对应一个数列 $(f(1), f(2), \cdots, f(n), \cdots)$; 反之, 数列 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ 可以看成 $\mathbb{N}_+$ 上的函数 $f\colon n \mapsto x_n$.

(ii) l^∞: 有界数列全体.

(iii) c: 收敛数列 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ (即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在) 的全体.

(iv) c_0: 收敛于 0 的数列全体.

(v) c_{00}: 只有有限多项非零的数列全体.

(vi) l^p:$l^p=\left\{x\colon x=(x_1,x_2,\cdots),\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty\right\}$ $(1\leqslant p<\infty)$.

显然, $c_{00}\subset l^p\subset c_0\subset c\subset l^\infty\subset\mathbb{R}^\infty$.

对于线性空间 X, X 中的线性无关组是指 X 中的一些元素构成的子集 A, 使得子集 A 中任意一个元素都不能被 A 中其他有限个元素线性表出. 这也是说, 子集 $\{x_\lambda\}$ 是 X 的线性无关组当且仅当 $\{x_\lambda\}$ 的任意有限子集 $\{x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\cdots,x_{\lambda_n}\}$ 是线性无关组.

定义 1.2.1 我们称线性空间 X 上的一个极大线性无关组为空间 X 的一组 **Hamel (哈梅尔) 基**. 若 X 的某个 Hamel 基中只有有限个元素, 则称 X 是有限维线性空间, 否则称其为无限维线性空间.

例 1.2.5 $\mathcal{F}=\{1,x,\cdots,x^n,\cdots\}$ 是多项式空间 $P[x]$ 的一个线性无关组, 并且可以表示 $P[x]$ 的所有元素, 因此 $\mathcal{F}$ 是 $P[x]$ 的一个 Hamel 基. 同样地, $\mathcal{F}$ 也是 $C[a,b]$ 的线性无关组, 但不能线性表示形如 e^x 等大量函数, 因此在 $C[a,b]$ 中不是极大的.

赋范线性空间

线性是一个代数概念, 在现代数学中, 我们自然地会看到代数结构和拓扑结构的交叉. 而线性空间上性质最好的一种拓扑是由范数导出的.

定义 1.2.2 记 $\mathbb{K}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$. 对于 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 X, 若 X 中的每个向量 x 都对应一个实数 $\|x\|$, 且满足如下条件:

(i) 对任意 $x\in X$, $\|x\|\geqslant 0$;

(ii) 对数 α 与 $x\in X, \|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$;

(iii) 对任意 $x,y\in X$, $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$,

则称 $\|\cdot\|$ 为 X 上的**半范数**, X 称为**半赋范空间**. 若 $\|\cdot\|$ 还满足

$$\|x\|=0 \quad \text{当且仅当} \quad x=0,$$

则称 $\|\cdot\|$ 为 X 上的**范数**, $(X,\|\cdot\|)$ 称为**赋范线性空间**.

线性空间上的范数诱导了这个空间上的度量 $d(x,y)=\|x-y\|$. 显然这个度量具有平移不变性, 即 $d(x,y)=d(x+z,y+z)$. 而且, 若 x_n 按度量 d 收敛于 x_0, 由三角不等式可得 $\|x_n\|\to\|x_0\|$. 换而言之, $\|\cdot\|$ 在度量 d 给出的拓扑下是连续的.

例 1.2.6 $C[a,b]$ 是有界闭区间 $[a,b]$ 上连续的实 (或复) 值函数 $f(x)$ 全体. 定义范数

$$\|f\|=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

容易验证, 它是 $C[a,b]$ 上的范数. 这个范数诱导了 $C[a,b]$ 上的度量 (见例 1.1.6)

$$d(f,g)=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|.$$

例 1.2.7 $C^{(k)}[a,b]$ 是区间 $[a,b]$ 中具有连续的 k 阶导函数的函数全体, 以

$$\|x\|=\max_{0\leqslant j\leqslant k}\max_{t\in[a,b]}|x^{(j)}(t)|$$

为范数.

例 1.2.8 设 E 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^k$ 的 Lebesgue 可测集. 对 $1\leqslant p<\infty$, 定义

$$\mathcal{L}^p(E)=\left\{f:f\ \text{是}\ E\ \text{上 Lebesgue 可测函数},\ \|f\|_p=\left(\int_E|f|^p\,\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty\right\}.$$

容易验证, $\|\cdot\|_p$ 满足定义 1.2.2 的 (i) 和 (ii), 由 Minkowski 不等式得 $\|\cdot\|_p$ 也满足定义中的 (iii). 那么 $\|\cdot\|_p$ 是 $\mathcal{L}^p(E)$ 的半范数, 但不是范数. 因为 $\|f\|_p=0$ 时并不能得到 $f=0$, 而只能得出 $f\underset{m}{\doteq}0$. 如果把满足 $f\underset{m}{\doteq}g$ 的两个函数 f,g 视为同一个函数 (即把 $f\underset{m}{\doteq}0$ 的函数 f 视为恒等于零的函数), 那么我们就得到 $\mathcal{L}^p(E)$ 上的一个等价关系 $\sim$. 我们仍以 f 来表示函数 f 在 $L^p(E)=\mathcal{L}^p(E)/\sim$ 中对应的等价类, $\|\cdot\|_p$ 便是 $L^p(E)$ 上的一个范数.

由范数诱导的度量

$$d(f,g)=\|f-g\|_p=\left(\int_E|f-g|^p\,\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}$$

也是完备的: 对于 $L^p(E)$ 中的 Cauchy 点列 $\{f_n\}$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n,m>N$ 时,

$$\|f_n-f_m\|_p^p=\int_E|f_n(x)-f_m(x)|^p\mathrm{d}m(x)\leqslant\varepsilon.$$

由 Chebyshev (切比雪夫) 不等式, 这个函数序列也是依测度 Cauchy 收敛的. 由实变函数的理论, 可取可测函数 f_0 为 $\{f_n\}$ 的依测度收敛极限. 由 Fatou (法图) 引理,

$$\|f_n-f_0\|_p^p=\int_E|f_n(x)-f_0(x)|^p\mathrm{d}m(x)\leqslant\varliminf_{m\to\infty}\int_E|f_n(x)-f_m(x)|^p\mathrm{d}m(x)\leqslant\varepsilon.$$

从而 $f_0\in L^p(E)$ 且为 $\{f_n\}$ 的极限 (另一个更完整的证明可见例 1.4.13).

例 1.2.9 设 E 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^k$ 中的 Lebesgue 可测集. 定义

$$\mathcal{L}^\infty(E)=\{f:f\ \text{是}\ E\ \text{上 Lebesgue 可测函数, 存在实数}\ M\ \text{使得}\ m(|f|>M)=0\}.$$

我们常称 $\mathcal{L}^\infty(E)$ 中的函数为本性有界函数. 如果定义等价关系 $f\sim g$ 为 $f\underset{m}{\doteq}g$, 那么

$$\|f\|_\infty=\inf_{m(E_0)=0}\sup_{x\in E\setminus E_0}|f(x)|$$

是 $L^\infty(E)=\mathcal{L}^\infty(E)/\sim$ 上的一个范数. 对它的完备性的证明留作练习.

例 1.2.10 (空间 $V[a,b]$) 设 $V[a,b]$ 是区间 $[a,b]$ 上的实 (或复) 有界变差函数的全体, 依照通常的线性运算, 它是一个线性空间. 对于 $f\in V[a,b]$, 规定

$$\|f\|=|f(a)|+\bigvee_a^b(f),$$

那么 $V[a,b]$ 按范数 $\|f\|$ 成为赋范线性空间. 我们令

$$V_0[a,b]=\big\{f\colon f\in V[a,b], f(a)=0,\ f \text{ 在 } (a,b) \text{ 中任一点是右连续的}\big\},$$

它是 $V[a,b]$ 的线性子空间. 在 $V_0[a,b]$ 上, 范数 $\|f\|$ 等于全变差 $\bigvee\limits_a^b(f)$.

实 (或复) 值有界变差函数与广义 (复) 测度有密切联系. 设 $\mathfrak{B}$ 是 $[a,b]$ 中的 Borel (博雷尔) 集全体, $M([a,b])$ 是 $([a,b],\mathfrak{B})$ 上有限值广义 (复) 测度全体. 在它上定义加法和数乘为

$$(\mu+\nu)(A)=\mu(A)+\nu(A),\forall\mu,\nu\in M([a,b]),A\in\mathfrak{B};$$
$$(\alpha\mu)(A)=\alpha\mu(A),\forall\mu\in M([a,b]),A\in\mathfrak{B},\alpha \text{ 为数}.$$

并规定

$$\|\mu\|=\sup\left\{\sum_{i=1}^\infty|\mu(E_i)|: E_i\in\mathfrak{B}, \text{当 } i\neq j \text{ 时}, E_i\cap E_j=\varnothing, \bigcup_{i=1}^\infty E_i=[a,b]\right\},$$

则 $\|\cdot\|$ 是 $M([a,b])$ 上的范数.

由实变函数的理论知, 对于 $\mu\in M([a,b])$, 令

$$f_\mu(x)=\begin{cases}0, & x=a,\\ \mu([a,x]), & a<x\leqslant b,\end{cases}$$

则 $\mu\to f_\mu$ 为 $M[a,b]$ 到 $V_0[a,b]$ 上保持范数的线性空间同构.

Banach 空间

若赋范线性空间 X 在诱导度量 $d(x,y)=\|x-y\|$ 下是完备的, 则称 X 是 **Banach (巴拿赫) 空间**. 我们来考察常见空间的完备性.

例 1.2.11 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 是 Banach 空间.

例 1.2.12 由例 1.1.6, $C[a,b]$ 是 Banach 空间.

例 1.2.13 令 $1\leqslant p<\infty$. 对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^p$, 定义 $\|x\|_p=\left(\sum\limits_{n=1}^\infty|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. 令 (1.2) 式中 $n\to\infty$ 得

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.9}$$

由此易得 $\|\cdot\|_p$ 是 l^p 上的范数. 下面我们来说明 l^p 是完备的.

证明 设 $x_m=(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\cdots,x_n^{(m)},\cdots)$ 是 l^p 中的一个基本点列, 由于

$$\left|x_i^{(m)}-x_i^{(k)}\right| \leqslant \|x_m-x_k\|_p=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j^{(m)}-x_j^{(k)}|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

所以当 $\{x_m\}$ 是 l^p 中基本点列时, 从上面的不等式立即得到对每个 i, $\{x_i^{(m)}\}$ 是基本数列. 由数列的 Cauchy 收敛原理, 它有极限 $x_i^{(0)}=\lim\limits_{m\to\infty}x_i^{(m)}$. 记 $x_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},\cdots)$.

因为 $\{x_m\}$ 是 l^p 中基本点列, 因而对任何 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $m,k\geqslant N$ 时,

$$\|x_m-x_k\|_p=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j^{(m)}-x_j^{(k)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon.$$

令 $m\to\infty$, 由 $\lim\limits_{m\to\infty}x_j^{(m)}=x_j^{(0)}$ 及 Fatou 引理得

$$\|x_0-x_k\|_p=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\varliminf_{m\to\infty}|x_j^{(m)}-x_j^{(k)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\varliminf_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|x_j^{(m)}-x_j^{(k)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon.$$

从而 $x_0=x_k-(x_k-x_0)\in l^p$. 同时也说明 $\{x_m\}$ 在 l^p 中收敛于 x_0, 从而 l^p 是完备的. □

例 1.2.14 令 $p=\infty$. 对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^\infty$, 定义

$$\|x\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}_+}|x_n|,$$

则 $\|\cdot\|_\infty$ 是 l^∞ 上的范数. 容易说明 l^∞ 也是完备的.

下面是判断子空间完备性的一般性结论.

引理 1.2.1 设 A 为完备的度量空间 (X,d) 的一个子集. 度量空间 (A,d) 是完备的当且仅当 A 是 X 的一个**闭子集**, 即: 若 A 中点列 $\{x_n\}$ 收敛于 X 中点 x_0, 则 $x_0\in A$.

证明 假设 (A,d) 是完备的. 若 A 中点列 $\{x_n\}$ 收敛于 X 中点 x_0, 则 $\{x_n\}$ 是 A 中的一个基本点列, 由假设即得存在 A 中一点 y_0 为 $\{x_n\}$ 的极限. 由极限的唯一性可知 $y_0=x_0\in A$, 从而 A 是 X 的闭子集.

反之, 设 A 是 X 的闭子集. 对于 A 中任意的基本点列 $\{x_n\}$, 由 X 的完备性可知存在点 $x_0\in X$ 为点列 $\{x_n\}$ 的极限, 再由 A 的闭性得 $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\in A$, 也就是说 (A,d) 是完备的. □

例 1.2.15 由于 c_0 可视为 l^∞ 的线性子空间, $\|\cdot\|_\infty$ 同样给出了 c_0 上的一个范数. 我们现在证明赋范线性空间 $(c_0,\|\cdot\|_\infty)$ 也是 Banach 空间.

证明 由引理 1.2.1, 只需说明 c_0 是闭的. 设 $x_m=(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\cdots,x_n^{(m)},\cdots)$ 是 c_0 中的一个基本点列, 且存在 $x_0\in l^\infty$ 使得 $\|x_m-x_0\|_\infty\to 0$, 我们需要证明 $x_0\in c_0$.

实际上, 对于任意 $\varepsilon>0$, 取一个 m 使得 $\|x_m-x_0\|_\infty<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 由 $x_m\in c_0$, 存在 N 使得对任意 $j>N$,$|x_j^{(m)}|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 从而, 对任意 $j>N$,

$$|x_j^{(0)}|\leqslant|x_j^{(m)}|+|x_j^{(0)}-x_j^{(m)}|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\|x_m-x_0\|_\infty\leqslant\varepsilon,$$

这就是说 $x_0\in c_0$. □

内积空间

定义 1.2.3 记 $\mathbb{K}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$. 对于 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 H, 如果 H 中任何两个向量 x,y 都对应着一个数 $\langle x,y\rangle\in\mathbb{K}$, 满足条件:

(i) (共轭对称性) 对任意 $x,y\in H$, $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$;

(ii) (对第一变元的线性) 对任意 $x,y,z\in H,\alpha,\beta\in\mathbb{K}$,

$$\langle\alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle;$$

(iii) (正定性) 对任意 $x\in H$, $\langle x,x\rangle\geqslant 0$, 且 $\langle x,x\rangle=0$ 的充要条件是 $x=0$,

那么称 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 H 中的内积, 称 H 是实 (或复) **内积空间**.

例 1.2.16 设 $\mathbb{C}^n$ 是 n 维的复 Euclid 空间, 对于 $\mathbb{C}^n$ 中任意两个向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, 定义

$$\langle x,y\rangle=x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2+\cdots+x_n\bar{y}_n.$$

显然 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 构成一个内积. 并且 $\mathbb{C}^n$ 上的范数满足

$$\|x\|^2=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

例 1.2.17 (l^2 空间) 在 l^2 中, 对于 $x=(x_1,x_2,\cdots)$, $y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^2$, 规定

$$\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^\infty x_n\bar{y}_n.$$

容易证明 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 满足内积的三个条件, 今后在 l^2 中都取这个内积. 同样, 我们有 $\|x\|_2^2=\langle x,x\rangle$.

例 1.2.18 (L^2 空间) 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 Lebesgue 可测子集. 对于 $f,g\in L^2(E)$, 定义

$$\langle f, g\rangle = \int_E f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t.$$

容易验证这是一个内积.

接下来我们讨论内积空间中的一些基本的性质. 以下假设 H 是内积空间.

引理 1.2.2 (对第二变元的共轭线性) 设 $x, y_1, y_2 \in H$, 则

$$\langle x, \lambda y_1 + \mu y_2\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y_1\rangle + \bar{\mu}\langle x, y_2\rangle.$$

这条引理的证明留给读者作为练习.

引理 1.2.3 (Cauchy-Schwarz (柯西–施瓦茨) 不等式) 设 $x, y \in H$, 则成立不等式

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle. \tag{1.10}$$

证明 当 $y = 0$ 时, (1.10) 式显然成立. 设 $y \neq 0$. 由正定性, 对任何数 t 都有

$$\langle x + ty, x + ty\rangle = \langle x, x\rangle + 2\mathrm{Re}\left\{\langle x, y\rangle\bar{t}\right\} + \langle y, y\rangle |t|^2 \geqslant 0. \tag{1.11}$$

在 (1.11) 式中令 $t = -\dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$ 得到

$$\langle x, x\rangle - 2\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle^2}\langle y, y\rangle \geqslant 0.$$

即得 (1.10) 式. □

例 1.2.19 在空间 $L^2(E)$ 中, 根据 Cauchy-Schwarz 不等式, 我们有

$$\left|\int_E f\bar{g}\mathrm{d}m\right| \leqslant \left(\int_E |f|^2\,\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_E |g|^2\,\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{2}}.$$

同理, 在空间 l^2 中, 我们有

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i\overline{y_i}\right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^2.$$

定理 1.2.1 设 $x \in H$, 定义 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, 那么 $\|\cdot\|$ 是 H 上的一个范数.

证明 显然, 只要验证 $\|\cdot\|$ 满足次可加性 (因为范数的其他要求都可以从内积的性质直接推出). 对于 $x, y \in H$,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &\leqslant \langle x, x\rangle + 2|\langle x, y\rangle| + \langle y, y\rangle \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2,\end{aligned}$$

所以 $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. □

我们称 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ 是由内积导出的范数. 于是 H 在这个范数下成为赋范线性空

间. 进而这个范数又导出了空间上的度量. 之后, 内积空间中的极限、收敛等拓扑概念, 如无特殊申明都是指在这个度量的意义下. 特别地, 若内积空间 H 所导出的度量是完备的, 则称 H 是一个 **Hilbert (希尔伯特) 空间**.

Cauchy-Schwarz 不等式的一个直接的推论是, 若 x 和 y 均非零, 则

$$\frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|}\leqslant 1.$$

因此, 存在唯一角度 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 使得 $\cos\theta=\dfrac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|}$, 我们称 θ 为 x 和 y 的 Hermite (埃尔米特) 夹角. $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 即为最要紧的垂直情形.

定义 1.2.4 如果内积空间 $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中两个向量 x,y 满足 $\langle x,y\rangle=0$, 就说 x 与 y 正交, 记作 $x\perp y$.

直接计算我们就可以得到一般内积空间上的勾股定理.

定理 1.2.2 (勾股定理, Pythagoras 毕达哥拉斯定理) 对内积空间 H 中两个元素 x,y, 若 $x\perp y$, 则有

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

最后再讨论范数与内积的一些关系.

引理 1.2.4 设 H 是内积空间, 那么内积关于两个变元是连续的. 即: 当 $x_n\to x, y_n\to y$ 时, 有 $\langle x_n,y_n\rangle\to\langle x,y\rangle$.

证明

$$\begin{aligned}|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x,y\rangle|&\leqslant|\langle x_n-x,y\rangle|+|\langle x_n,y_n-y\rangle|\\&\leqslant\|x_n-x\|\,\|y\|+\|x_n\|\,\|y_n-y\|\to 0.\end{aligned}$$

□

当 H 是内积空间, $\|\cdot\|$ 是由内积所导出的范数时, 此时内积也可以用范数来表达. 设 $x,y\in H$. 当 H 是实内积空间时, 成立

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right). \tag{1.12}$$

而当 H 是复内积空间时, 成立

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2+\mathrm{i}\,\|x+\mathrm{i}y\|^2-\|x-y\|^2-\mathrm{i}\,\|x-\mathrm{i}y\|^2\right). \tag{1.13}$$

以上两条均可直接计算验证. 等式 (1.12) 及 (1.13) 称为极化恒等式, 是非常重要的等式.

引理 1.2.5 (平行四边形公式) 设 H 是内积空间, $\|\cdot\|$ 是由内积决定的范数, 则对任何 $x,y\in H$, 成立

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2). \tag{1.14}$$

若 H 是二维实空间, 则等式 (1.14) 的几何意义是, 平行四边形中对角线长度的平方

和等于四边的长度平方和, 称其为平行四边形公式. 对一般的内积空间, 等式 (1.14) 也称为平行四边形公式. 引理 1.2.5 说明, 由内积决定的范数必须适合平行四边形公式.

平行四边形公式是内积空间中范数的特征性质.

定理 1.2.3 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间. 如果对 X 中任何元素 x, y, 都成立平行四边形公式 (1.14), 那么可以在 X 中定义内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 使得 $\|\cdot\|$ 是由内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 诱导的范数.

定理的证明留给读者作为练习, 可参考文献 [6] 6.1 节.

例 1.2.20 考虑空间 $L^\infty[0,1]$. 取 $f = 1 + x$, $g = 1 - x$, 则

$$\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 \neq 2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2).$$

从而空间 $L^\infty[0,1]$ 不满足平行四边形法则, 其范数不能由内积诱导.

习题 1.2

1. 证明: 一个赋范线性空间上由范数定义的拓扑和线性空间结构是相适应的, 即: 加法运算和数乘运算都是连续的.
2. 取 $p \geqslant 1$. 设 $R_1, R_2, \cdots, R_n, \cdots$ 是一列赋范线性空间, $x = \{x_n\}$ 是一列元素, 其中 $x_n \in R_n$, $n = 1, 2, \cdots$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty$. 这种元素列的全体记作 R, 类似通常的数列的加法及数乘运算, 在 R 中引入线性运算, 证明 R 是一线性空间. 如果又规定
$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$
证明: R 按范数 $\|\cdot\|$ 成为赋范线性空间.
3. 设 L 是赋范线性空间, $L \times L$ 按照线性运算:
$$\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$$
成为线性空间. 在 $L \times L$ 上定义两个范数如下:
$$\|(x,y)\|_1 = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}, \quad \|(x,y)\|_2 = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$
   (i) 证明: $(L \times L, \|\cdot\|_1)$ 和 $(L \times L, \|\cdot\|_2)$ 都是赋范线性空间.
   (ii) 作 $(L \times L, \|\cdot\|_1)$ 到 $(L \times L, \|\cdot\|_2)$ 的映射:
$$\varphi\colon (x,y) \mapsto (x', y'), \quad (x', y') = (x, y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$
   其中矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是非奇异的. 证明: φ 是拓扑同胚 (即 φ 是到上的一一对应, 且 φ 和 φ^{-1} 都是连续的).
4. 证明: 赋范线性空间 $C^{(k)}[a,b], L^\infty[a,b], l^\infty$ 是完备的.

5. 证明: 赋范线性空间 c 是完备的.
6. 设 $C_b(0,1]$ 表示在半开半闭区间 $(0,1]$ 上处处连续且有界的函数全体. 对于每个 $x \in C_b(0,1]$, 令 $\|x\| = \sup\limits_{0<t\leqslant 1} |x(t)|$. 证明:
   (i) $\|x\|$ 是空间 $C_b(0,1]$ 上的范数; $C_b(0,1]$ 按 $\|\cdot\|$ 成为赋范线性空间;
   (ii) 在 $C_b(0,1]$ 中点列 $\{x_n\}$ 按范数 $\|\cdot\|$ 收敛于 x_0 的充要条件是 $\{x_n\}$ 在 $(0,1]$ 上一致收敛于 x_0.

定义 (等距映射) 设 (X, d_X), (Y, d_Y) 是两个度量空间, f 是从 X 到 Y 的映射, 如果

$$d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x'), \quad \forall x, x' \in X,$$

就称 f 是等距映射. 如果存在一个从 X 到 Y 中一一对应的、到上的等距映射, 就称度量空间 X 和 Y 是等距同构.

7. 证明: 有界实数列全体所成的赋范线性空间 l^∞ 与空间 $C_b(0,1]$ 的一个子空间是等距同构的.
8. 举出五个赋范线性空间的例子, 它们的范数都不能由内积诱导出.
9. 设 R 是 n 维线性空间, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 R 的一组基, 证明 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 成为 R 的内积的充要条件是存在 n 阶正定方阵 $A = (a_{ij})$, 使得

$$\left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \bar{y}_j.$$

10. 设 H 是内积空间. 如果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 H 中的向量, 它们满足条件 $\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$, 证明: $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是一组线性无关的向量.
11. 证明定理 1.2.3.

定义 设 H 是内积空间, 对于 $x \in H, A \subset H$, 若对每个 $y \in A$ 有 $x \perp y$, 则称 $x \perp A$. 并记

$$A^\perp = \{x \in \mathcal{H} : x \perp A\}.$$

12. 设 H 是一个 Hilbert 空间.
   (i) 对于 $x \in H$, $x \perp H$ 的充要条件是 $x = 0$.
   (ii) 对 H 中的子集 A, $A^\perp$ 是闭的线性子空间.
   (iii) 若子集 $M \subset N \subset H$, 则 $M^\perp \supset N^\perp$.
   (iv) 对线性空间 $M \subset H$, $M \cap M^\perp = \{0\}$.
   (v) 设 L 是由 H 的两个子集 M 和 N 张成的线性子空间, 证明 $L^\perp = M^\perp \cap N^\perp$.
13. 设 $R_1, R_2, \cdots, R_n, \cdots$ 是一列内积空间. 令 $R = \left\{ \{x_n\} : x_n \in R_n, \sum\limits_{n=1}^\infty \|x_n\|^2 < \infty \right\}$, 当 $\{x_n\}, \{y_n\} \in R$ 时, 规定

$$\alpha\{x_n\} + \beta\{y_n\} = \{\alpha x_n + \beta y_n\}, \quad \alpha, \beta \text{ 是数},$$

$$\langle \{x_n\}, \{y_n\} \rangle = \sum_{n=1}^\infty \langle x_n, y_n \rangle.$$

证明 R 是内积空间. 如果 $R_n (n = 1, 2, \cdots)$ 都是 Hilbert 空间, 证明 R 也是 Hilbert 空间. (空间 R 常记为 $\bigoplus_n R_n$.)

1.3 Hilbert 空间的正交系

在有限维的 Euclid 空间中, 向量除了模长 (范数) 之外, 还有一个很重要的概念——两个向量的夹角. 特别地, 当两个向量正交时, 我们就有勾股定理, 向量的投影, 等等. 而在赋范线性空间中, 并没有引进这个概念. 我们还知道, 向量的模长与夹角可以用更本质的量——向量的内积来描述, 从而利用内积可以在内积空间中建立 Euclid 几何学.

类似于 Euclid 空间中的正交坐标系, 在 Hilbert 空间中可引入正交系与正交基的概念, 它也是数学分析中正交函数系概念的拓广.

定义 1.3.1 设 $\mathfrak{F}$ 是 Hilbert 空间 H 中的一族非零向量,

(i) 如果 $\mathfrak{F}$ 中任何两个不同的向量都正交, 就称 $\mathfrak{F}$ 是 H 的**正交系**.

(ii) 如果正交系 $\mathfrak{F}$ 中每个向量的范数都等于 1, 就称 $\mathfrak{F}$ 是**标准正交系** (或规范正交系).

由定义立即可知, 如果 $\mathfrak{F}$ 是 Hilbert 空间 H 中的正交系 (标准正交系), 那么 $\mathfrak{F}$ 的任何子集也是 H 中的正交系 (标准正交系).

例 1.3.1 在 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中,

$$e_1=(1,0,\cdots,0),\quad e_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,0,0,\cdots,1)$$

组成标准正交系.

例 1.3.2 在 l^2 中, 令 e_n 为在位置 n 取 1 其他位置取 0 的点列, 则 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$ 为 l^2 的标准正交系.

例 1.3.3 在实 (或复) 周期函数空间 $L^2[0,2\pi]$ 中, 规定内积为

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x,\quad \forall f,g\in L^2[0,2\pi].$$

这时 $\{1,\sqrt{2}\cos x,\sqrt{2}\sin x,\sqrt{2}\cos 2x,\sqrt{2}\sin 2x,\cdots,\sqrt{2}\cos nx,\sqrt{2}\sin nx,\cdots\}$ 组成 $L^2[0,2\pi]$ 的标准正交系.

例 1.3.4 在复空间 $L^2[0,2\pi]$ 中, 直接计算可得 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}:n\in\mathbb{Z}\}$ 组成一组标准正交系.

另一个常用的研究周期函数的模型是圆周 $\mathbb{T}=\{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}:0\leqslant x<2\pi\}$ 上的函数理论. 取 $\mathbb{T}$ 上标准化的弧长测度 $\dfrac{\mathrm{d}x}{2\pi}$, 容易证明 $L^2\left(\mathbb{T},\dfrac{\mathrm{d}x}{2\pi}\right)$ 按内积

$$\langle f,g\rangle \overset{\text{def}}{=\!=} \int_{x\in[0,2\pi)}f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\overline{g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})}\frac{\mathrm{d}x}{2\pi},\quad \forall f,g\in L^2\left(\mathbb{T},\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}\right)$$

构成 Hilbert 空间, 且 $\{z^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}:n\in\mathbb{Z}\}$ 是标准正交系. 这些结论也可以从 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$:

$[0, 2\pi) \to \mathbb{T}$ 所诱导的映射 $f(z) \to f(e^{ix})$ 是从 $L^2\left(\mathbb{T}, \frac{dx}{2\pi}\right)$ 到 $L^2[0, 2\pi]$ 的空间同构得到.

在数学分析中, 我们曾见到过 Fourier (傅里叶) 级数, 对于函数 $f \in L^2[0, 2\pi]$, 我们称

$$
\begin{aligned}
a_0(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \langle f, 1\rangle, \\
a_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sqrt{2}\cos nt dt = \langle f, \sqrt{2}\cos nx\rangle, \\
b_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sqrt{2}\sin nt dt = \langle f, \sqrt{2}\sin nx\rangle
\end{aligned}
$$

为函数 f 关于三角函数系的 Fourier 系数. Fourier 级数中的主要问题就是研究 Fourier 系数 $a_n(f), b_n(f)$ 的性质以及部分和 $(S_nf)(x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\sqrt{2}\cos kx + b_k(f)\sqrt{2}\sin kx)$ 的收敛性.

这个概念可以作如下的推广:

定义 1.3.2　设 $\mathfrak{F}$ 是 Hilbert 空间 H 的一组标准正交系, $x \in H$, 数集

$$\{\langle x, e\rangle : e \in \mathfrak{F}\}$$

称为向量 x 关于标准正交系 $\mathfrak{F}$ 的 Fourier 系数集, 而 $\langle x, e\rangle$ 称为 x 关于 $e(e \in \mathfrak{F})$ 的 Fourier 系数.

定理 1.3.1 (Bessel (贝塞尔) 不等式)　设 $\mathfrak{F} = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的标准正交系. 那么, 对于每个 $x \in H$, 它的 Fourier 系数 $\{\langle x, e_\lambda\rangle : \lambda \in \Lambda\}$ 中最多只有可列个不为零, 并且还成立如下的 Bessel 不等式:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle x, e_\lambda\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2 . \tag{1.15}$$

证明　对于 $\mathfrak{F}$ 的任何有限子集 $\mathfrak{F}' = \{e_{k_1}, e_{k_2}, \cdots, e_{k_m}\}$, 由于 $x - \sum_{i=1}^{m}\langle x, e_{k_i}\rangle e_{k_i} \perp \sum_{i=1}^{m}\langle x, e_{k_i}\rangle e_{k_i}$, 根据勾股定理 1.2.2 可得

$$\|x\|^2 \geqslant \left\|\sum_{i=1}^{m}\langle x, e_{k_i}\rangle e_{k_i}\right\|^2 = \sum_{i=1}^{m}|\langle x, e_{k_i}\rangle|^2 . \tag{1.16}$$

令 $\mathfrak{F}_n = \left\{e_\lambda \in \mathfrak{F} : |\langle x, e_\lambda\rangle| \geqslant \frac{1}{n}\right\}$. 如果 $\mathfrak{F}'$ 是从集合 $\mathfrak{F}_n$ 中任意选取的一个有限集, 由 (1.16) 式得到 $\mathfrak{F}'$ 的元素个数 $|\mathfrak{F}'|$ 满足

$$|\mathfrak{F}'| \leqslant \sum_{e_\lambda \in \mathfrak{F}'} n^2 |\langle x, e_\lambda\rangle|^2 \leqslant n^2 \|x\|^2 < \infty.$$

特别地, $|\mathfrak{F}_n| \leqslant n^2 \|x\|^2 < \infty$. 因此, x 的 Fourier 系数不等于零的集合 $\mathfrak{F}'' = \bigcup\limits_n \mathfrak{F}_n$ 是至多可列集. 并且这时有

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle x, e_\lambda \rangle|^2 = \sum_{e_\lambda \in \mathfrak{F}''} |\langle x, e_\lambda \rangle|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{e_\lambda \in \mathfrak{F}_n} |\langle x, e_\lambda \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2. \qquad \square$$

Bessel 不等式表示向量 x 在 $\mathfrak{F}$ 中每个标准向量 e_λ 上投影 $\langle x, e_\lambda \rangle e_\lambda$ 的 "长度" 平方的和不超过 x 的 "长度" 平方. 同时, 它也蕴涵了下面的推论.

推论 1.3.1 设 $\{e_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的标准正交系, 那么对任何 $x \in H$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \langle x, e_n \rangle = 0.$$

这个推论在 $L^2[0, 2\pi]$ 中用于标准正交三角函数系的情况下, 就是 Riemann-Lebesgue (黎曼–勒贝格) 引理.

1.3.1 Hilbert 空间的正交基

Bessel 不等式什么时候成为等式? 为了研究这个问题, 我们引入下面的定义.

定义 1.3.3 设 $\mathfrak{F} = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的标准正交系, 对于 $x \in H$, 级数 $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} \langle x, e_\lambda \rangle e_\lambda$ 称为向量 x 关于 $\mathfrak{F}$ 的 Fourier 级数, 或 Fourier 展开式. 当 $x = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} \langle x, e_\lambda \rangle e_\lambda$ 成立时, 就称 x 关于 $\mathfrak{F}$ 可以展开成 Fourier 级数.

注 1.3.1 对于任意指标的求和 $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda$, 一般性的定义为: 取定向集 $A = \{\Lambda$ 中的有限子集$\}$ 以及定义 A 上的序关系 "$F_1 \prec F_2$" 为 $F_1 \subseteq F_2$, 那么

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda = \lim_{F \in A} \sum_{\lambda \in F} c_\lambda.$$

在定义 1.3.3 的使用中, 为避免使用太多定向集和网的讨论, 注意到 $\{e_\lambda : \langle x, e_\lambda \rangle \neq 0\}$ 是可数集, 将其排列为一个序列 $\{e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}, \cdots, e_{\lambda_n}, \cdots\}$. 根据 Bessel 不等式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_{\lambda_n} \rangle|^2 < \infty$, 再由

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{m} \langle x, e_{\lambda_k} \rangle e_{\lambda_k} \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |\langle x, e_{\lambda_k} \rangle|^2,$$

可知 $\left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, e_{\lambda_k} \rangle e_{\lambda_k} \right\}_n$ 是 H 中的基本点列, 因此其极限存在. 同时, 也可以说明这个极限与可数集 $\{e_\lambda : \langle x, e_\lambda \rangle \neq 0\}$ 所取的排列顺序无关 (见习题 1.3

第 8 题). 因此, 可合理定义

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle x,e_\lambda\rangle e_\lambda=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_{\lambda_k}\rangle e_{\lambda_k}.$$

并由定义得

$$\left\|\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle x,e_\lambda\rangle e_\lambda\right\|^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_{\lambda_k}\rangle|^2=\sum_{\lambda\in\Lambda}|\langle x,e_\lambda\rangle|^2.$$

若记 $\mathrm{span}\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为由 $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 线性表示的元素全体构成的线性空间, 这个空间的极限点全体构成的闭线性空间记为 $\overline{\mathrm{span}}\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, 由上面的定义即得 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\langle x,e_\lambda\rangle e_\lambda\in\overline{\mathrm{span}}\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

定理 1.3.2 设 $\mathfrak{F}=\{e_\lambda\colon\lambda\in\Lambda\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的标准正交系, 下列命题等价:

(i) 对 H 中任意元素 x, 有 $x=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\langle x,e_\lambda\rangle e_\lambda$;

(ii) $\overline{\mathrm{span}}\{e_\lambda:\lambda\in\Lambda\}=H$;

(iii) $\{e_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是**完全**的, 即: 若 $x\in H$ 满足 $x\perp e_\lambda(\forall\lambda\in\Lambda)$, 则 $x=0$;

(iv) $\{e_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是**完备**的, 即: 对 H 中任意元素 x, Parseval (帕塞瓦尔) 等式 $\|x\|^2=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}|\langle x,e_\lambda\rangle|^2$ 成立.

我们称满足上述条件之一的标准正交系为 Hilbert 空间 H 中的一组**标准正交基** (或**规范正交基**).

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii): 由注 1.3.1 中讨论可得.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 设 H 中元素 x 满足 $x\perp e_\lambda(\forall\lambda\in\Lambda)$. 由内积的线性性质可得, 对任何 $y\in\mathrm{span}\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, 存在正整数 n 及数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 使得 $y=\sum\limits_{i=1}^{n}c_ie_i$, 则

$$\langle x,\,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}\overline{c_i}\langle x,\,e_i\rangle=0.$$

这就是说 $x\perp y$. 再由内积连续性, 对每个 $y\in\overline{\mathrm{span}}\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}=\mathcal{H}$, 可取 $y_n\in\mathrm{span}\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 且 y_n 按范数收敛于 y, 则

$$\langle x,\,y\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle x,\,y_n\rangle=0,$$

故 $x\perp y$. 特别地, $x\perp x$. 从而 $\langle x,x\rangle=0$, 即 $x=0$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): 对于 $x\in H$, 令 $y=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\langle x,e_\lambda\rangle e_\lambda\in\mathcal{H}$, 则对任意 $\lambda\in\Lambda$,

$$\langle x-y,e_\lambda\rangle=\langle x,e_\lambda\rangle-\langle y,e_\lambda\rangle=0,$$

即 $x-y\perp e_\lambda$. 由条件 (iii) 得 $x-y=0$. 从而

$$\|x\|^2=\|y\|^2=\sum_{\lambda\in\Lambda}|\langle x,e_\lambda\rangle|^2.$$

(iv) $\Rightarrow$ (i): 对任意 $x\in H$, 令 $y=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\langle x,e_\lambda\rangle e_\lambda$, 显然 $x-y\perp y$. 再由勾股定理得 $\|x-y\|^2=\|x\|^2-\|y\|^2=0$. 从而, $x=y=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\langle x,e_\lambda\rangle e_\lambda$. □

例 1.3.5 在 l^2 中, 令 e_n 为在位置 n 取 1 其他位置取 0 的数列, 则标准正交系 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$ 是完全的, 因此为 l^2 的一组标准正交基. 实际上, 若 x 垂直于这组标准正交系, 则对任意正整数 n, 有 $x_n=\langle x,e_n\rangle=0$, 即 $x=0$.

例 1.3.6 $L^2[0,2\pi]$ 中 $\mathfrak{F}=\{1,\cdots,\sqrt{2}\sin nx,\sqrt{2}\cos nx,\cdots\}$ 是一组标准正交基. 从而, 我们有

$$\|f\|^2=\sum_{e\in\mathfrak{F}}|\langle f,e\rangle|^2,\quad \forall f\in L^2[0,2\pi]$$

成立, 这就是数学分析中所陈述的 Parseval 等式. 而右端和的通项收敛于 0, 就是 Fourier 级数的 Riemann-Lebesgue 引理:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0;\quad \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0. \tag{1.17}$$

证明 只需说明标准正交系 $\mathfrak{F}$ 满足条件 (ii), 即 $\overline{\operatorname{span}}\{e:e\in\mathfrak{F}\}=L^2[0,2\pi]$. 将

$$C_c^\infty(0,2\pi)=\{f\in C[0,2\pi]:f\text{无限阶可微},\ \overline{\{f\neq 0\}}\text{在 }(0,2\pi)\text{ 中紧}\}$$

简记为 C_c^∞. 由实变函数理论知 $L^2[0,2\pi]$ 中点可用 C_c^∞ 中函数逼近 (完整证明也可见例 1.4.6).

对任意 $f\in C_c^\infty$, 使用两次分部积分有如下的 f,f'' 的 Fourier 系数关系:

$$\begin{aligned}a_n(f)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sqrt{2}\cos nt\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}f'(t)\sqrt{2}\sin nt\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{2\pi n^2}\int_0^{2\pi}f''(t)\sqrt{2}\cos nt\mathrm{d}t=-\frac{a_n(f'')}{n^2}.\end{aligned}$$

故此 $|a_n(f)|\leqslant\dfrac{\|f''\|}{n^2}$, 同理可得 $|b_n(f)|\leqslant\dfrac{\|f''\|}{n^2}$. 这说明当 $n\to\infty$ 时, 部分和

$$(S_nf)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^n(a_k(f)\sqrt{2}\cos kx+b_k(f)\sqrt{2}\sin kx)$$

在 $[0,2\pi]$ 上一致收敛. 再由数学分析中的 Dini-Lipschitz (迪尼–利普希茨) 判别法知, S_nf 点态收敛于 f. 这意味着 $\|S_nf-f\|\to 0$, 从而 $f\in\overline{\operatorname{span}}\{e:e\in\mathfrak{F}\}$. 由 $\overline{C_c^\infty}=$

$L^2[0,2\pi]$ 即得所需结论. □

根据定理 1.3.2, 对任何 $f \in L^2[0,2\pi]$, 有

$$f = a_0 + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt). \tag{1.18}$$

(1.18) 式的右边级数正是数学分析中所说的 f 的 Fourier 级数. 必须注意, (1.18) 式右边级数的部分和是按照 Hilbert 空间 $L^2[0,2\pi]$ 中的范数收敛于 f, 换句话说, f 的 Fourier 级数的部分和平方平均收敛于 f. 按定义, 这并不意味着下式成立:

$$\lim_{n\to\infty}\left[a_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)\right] \underset{m}{\doteq} f. \tag{1.19}$$

在 1915 年, Luzin (卢津) 猜测: 对 $L^2(\mathbb{T})$ 中的函数 f, (1.19) 式是成立. 这个猜测一直是三角级数中一个重要的课题. Kolmogorov (科尔莫哥罗夫) 首先于 1923 年构造性地给出了一个 $L^1(\mathbb{T})$ 的函数, 它的部分和是几乎处处点点发散的. 1966 年, L. Carleson (卡勒松) 证明了 Luzin 猜测是正确的. 紧接着在 1967 年, R. A. Hunt (亨特) 证明: 对于 $L^p[0,2\pi](p>1)$ 中的函数, 它的 Fourier 级数也是几乎处处收敛的. 这方面的结果是三角级数理论的一个重要突破.

例 1.3.7 由例 1.3.6 与 Euler (欧拉) 公式, 在复空间 $L^2[0,2\pi]$ 中, $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} : n \in \mathbb{Z}\}$ 是一组标准正交基. 这就是说, $\{z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} : n \in \mathbb{Z}\}$ 也是 $L^2\left(\mathbb{T}, \dfrac{\mathrm{d}x}{2\pi}\right)$ 的标准正交基.

对于 $f \in L^2[0,2\pi]$, 若令

$$f(n) = \langle f, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\frac{\mathrm{d}x}{2\pi},$$

则有 $\|f\|^2 = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)|^2$. 这说明 $f \mapsto \{f(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ 是 $L^2[0,2\pi]$ 到 $l^2(\mathbb{Z})$ 上的一个同构.

例 1.3.8 (Legendre (勒让德) 多项式) 在 $L^2[-1,1]$ 中, 函数列 $g_k(x) = x^k(k = 0,1,2,\cdots)$ 是线性无关的. 因此可以用 Gram-Schmidt (格拉姆–施密特) 方法将 $\{g_k\}$ 化成标准正交的:

$$h_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}, \quad h_1 = \frac{g_1 - \langle g_1, h_0\rangle h_0}{\|g_1 - \langle g_1, h_0\rangle h_0\|}, \cdots.$$

显然 h_k 依旧是 k 次的多项式. 可是要用直接计算的方法算出函数 h_k 是比较麻烦的, 因此对许多具体问题往往还要用一些特殊的方法.

实际上, 可以证明 Legendre 多项式

$$P_0(x) = 1, P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, \quad n = 1,2,\cdots$$

是 $L^2[-1,1]$ 中的正交多项式系. 将 Legendre 多项式单位化得到

$$h_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad h_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n,\quad n=1,2,\cdots$$

就是 $\{g_n\}$ 经过 Gram-Schmidt 过程得到的正交向量系. 又由于多项式全体在 $L^2[-1,1]$ 中稠密 (见例 1.4.6), 因此 $\{h_n: n=0,1,\cdots\}$ 构成了一组标准正交基 (见习题 1.3 第 5 题).

例 1.3.9 令 H_n 为 Hermite 多项式 $(-1)^n\mathrm{e}^{t^2}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\mathrm{e}^{-t^2}$, 作

$$\psi_n(t)=\left(2^n n!\sqrt{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}H_n(t),$$

则 $\psi_n(t)(n=0,1,2,\cdots)$ 组成 $L^2(\mathbb{R},\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}m(x))$ 中的完备标准正交系.

令 $L_n(t)$ 为 Laguerre (拉盖尔) 多项式 $\mathrm{e}^t\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^n\mathrm{e}^{-t})$, 则

$$\frac{1}{n!}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}L_n(t)(n=0,1,\cdots)$$

组成 $L^2((0,\infty),\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}m(x))$ 中的完备标准正交系. 相关证明及更多正交多项式的内容可参见文献 [21].

下面给出了任意 Hilbert 空间标准正交基的存在性结果.

定理 1.3.3 设 A 是 Hilbert 空间 H 的标准正交系, 则 A 可扩张为 H 的一组标准正交基.

在这个命题的证明中, 我们需要用到 Zorn (佐恩) 引理: 设 $(D,\prec)$ 是一个偏序集. 若对任意全序子集 $M\subset D$, 均存在上界 $a\in D$ 使得对每个 $b\in M$, $b\prec a$, 那么 D 存在极大元.

证明 考虑 $\mathcal{F}=\{B: B$ 是 H 中的标准正交系$, B\supseteq A\}$. 由于 $A\in\mathcal{F}$, 从而 $\mathcal{F}$ 非平凡, 容易验证包含关系是其上的一个偏序.

对于 $\mathcal{F}$ 的全序子集 $M=\{B_\mu:\mu\in\Gamma\}$, 定义 $B=\bigcup\limits_{\mu\in\Gamma}B_\mu$, 则 B 是 M 的上界. 只需说明 $B\in\mathcal{F}$: 对任意 $e,f\in B$, 设 $e\in B_{\mu_1}$, $f\in B_{\mu_2}$. 不妨设, $B_{\mu_1}\subseteq B_{\mu_2}$, 则 $e,f\in B_{\mu_2}$, 故 $e\perp f$. 所以 $B\in\mathcal{F}$, 这就说明了 B 是 M 的上界.

由 Zorn 引理, $\mathcal{F}$ 中存在极大元 C, 则 C 是完全的, 从而就找到了 $\mathcal{H}$ 中由 A 扩张的一组标准正交基. 事实上, 若 C 不是完全的, 则存在 $0\neq f\in H$ 使得 $f\perp e(\forall e\in C)$. 但这时正交系 $C\cup\left\{\dfrac{f}{\|f\|}\right\}\in\mathcal{F}$, 与 C 的极大性矛盾. □

一个 Hilbert 空间上可以有很多组不同的标准正交基, 但是由集合论的知识可知, 两组标准正交基的势总是一样的. 而且, Hilbert 空间本质上由标准正交基的势唯一确定. 具体来说, 两个 Hilbert 空间 H_1 与 H_2 是 (保持内积线性) 空间同构的充要条件是它们的标准正交基的势是相同的 (见习题 1.3 第 2 题).

1.3.2 投影定理

在 Euclid 空间的几何学中, 投影是极为重要的概念. 对点 x 及线性子空间 L, 可以找到 L 中一点 x_0 使得 $x-x_0$ 垂直于 L, 并且垂足 x_0 恰好为 L 中到 x 距离最近的点. 我们同样可以把投影的概念推广到内积空间中.

定理 1.3.4 (投影定理) 设 M 是 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间, 那么, 对任何 $x\in H$, 存在唯一 $x_0\in M$, $x_1\perp M$ 使 $x=x_0+x_1$. 这种分解称为正交分解, x_0 称为 x 在 M 上的**正交投影**. 特别地, 当 $x\in M$ 时, $x_0=x$.

证明 存在性. 由于 M 是 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间, 则 $(M,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个完备的内积空间. 设 $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1}$ 是 M 的正交基. 根据定理 (1.3.3), 存在 $\Lambda_2\supset\Lambda_1$, $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2}$ 是 H 的一组正交基. 则对任意的 $x\in H$,

$$x=\sum_{\lambda\in\Lambda_2}\langle x,e_\lambda\rangle e_\lambda=\sum_{\lambda\in\Lambda_1}\langle x,e_\lambda\rangle e_\lambda+\sum_{\lambda\in\Lambda_2\setminus\Lambda_1}\langle x,e_\lambda\rangle e_\lambda.$$

显然, $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda_1}\langle x,e_\lambda\rangle e_\lambda\in M$, $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda_2\setminus\Lambda_1}\langle x,e_\lambda\rangle e_\lambda\in M^\perp$.

唯一性. 如果 $x=y_0+y_1$ 是 x 的另外一个正交分解, $y_0\in M$, $y_1\perp M$, 那么

$$x_0-y_0=y_1-x_1.$$

所以

$$\begin{aligned}\|x_0-y_0\|^2&=\langle x_0-y_0,x_0-y_0\rangle=\langle x_0-y_0,y_1-x_1\rangle\\&=\langle x_0-y_0,y_1\rangle-\langle x_0-y_0,x_1\rangle=0,\end{aligned}$$

因此, $y_0=x_0$, $y_1=x_1$. □

投影定理是 Hilbert 空间理论中极其重要的一个基本定理. 由投影定理, 我们可以得到: Hilbert 空间 H 可以分解成正交和 $H=M\oplus M^\perp$.

M 在 H 中的正交补空间 $M^\perp$ 经常记为 $H\ominus M$. 更一般地, 如果 M,N 为 H 的两个闭线性子空间, $M\subset N$, 定义 $N\ominus M=N\cap M^\perp$, 那么我们有 $N=M\oplus(N\ominus M)$.

推论 1.3.2 设 M 是 Hilbert 空间 H 中的闭线性子空间, 而且 $M\neq H$, 那么 $M^\perp$ 中有非零元素.

推论 1.3.3 设 H 是 Hilbert 空间, M 是 H 的线性子空间, 那么 $\overline{M}=(M^\perp)^\perp$. 特别地, $M^\perp=\{0\}$ 的充要条件是 M 在 H 中稠密.

证明 显然 $M\subset(M^\perp)^\perp$. 由于 $(M^\perp)^\perp$ 是 H 的闭线性子空间, 而 $\overline{M}$ 是包含 M 的最小闭集, 所以 $\overline{M}\subset(M^\perp)^\perp$.

若 $\overline{M}$ 是 $(M^\perp)^\perp$ 的真子空间, 则存在非零向量 $x\in(M^\perp)^\perp\ominus\overline{M}=\overline{M}^\perp\cap(M^\perp)^\perp$. 注意到 $\overline{M}^\perp\subset M^\perp$, 所以 $x\perp x$, 这与 $x\neq0$ 矛盾. 因此 $\overline{M}=(M^\perp)^\perp$. □

在上述投影定理的证明中, 需要使用公理集合论中的 Zorn 引理. 我们也可以使用几何的方法给出一个直接的证明.

定义 1.3.4 设 A 是线性空间 X 的一个子集, 若对于任意的 $x, y \in A$ 以及 $0 < t < 1$, 都有 $tx + (1-t)y \in A$, 则称 A 是一个凸集.

定理 1.3.5 设 M 是 Hilbert 空间 H 的一个闭凸子集, 则对任意 $x \in H$, 存在唯一的 $x_0 \in M$, 使得 $\|x - x_0\| = \inf\limits_{y\in M} \|x - y\|$.

证明 先证明存在性. 记 $d = \inf\limits_{y\in M} \|x - y\|$. 取 $\{x_n\} \subset M$, 使得 $\|x - x_n\| \to d$. 由平行四边形法则得

$$2(\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2) = 4\left\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 .$$

移项得到

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 &= 2\|x - x_m\|^2 + 2\|x - x_n\|^2 - 4\left\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \\ &\leqslant 2\|x - x_m\|^2 + 2\|x - x_n\|^2 - 4d^2 \to 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

所以 $\{x_n\}$ 是 H 中的一个 Cauchy 列. 故存在 $x_0 \in M$ 使得 $x_n \to x_0$, 从而 $\|x - x_0\| = d$.

再证明唯一性. 若 M 中的点 $\overline{x_0}$ 满足 $\|x - \overline{x_0}\| = d$. 根据 (1.20) 式,

$$\|x_0 - \overline{x_0}\|^2 \leqslant 2\|x - x_0\|^2 + 2\|x - \overline{x_0}\|^2 - 4d^2 \leqslant 0.$$

于是 $x_0 = \overline{x_0}$, 唯一性得证. □

当 M 还是 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间时, 对任意 $x \in H$, 取 $x_0 \in M$ 达到 x 到 M 的距离 $d = \inf\limits_{y\in M} \|x - y\|$. 那么, x_0 就是 x 到 M 上的正交投影. 要说明这一点, 只需证明 $x - x_0 \perp M$. 事实上, 任取 $z \in M$, 注意到 $x_0 + tz \in M$($\forall$ 数 t), 则有

$$d^2 \leqslant \|x - x_0 - tz\|^2 = \|x - x_0\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle \bar{t}(x - x_0), z\rangle + |t|^2 \|z\|^2 .$$

从而不等式

$$0 \leqslant -2\mathrm{Re}\langle \bar{t}(x - x_0), z\rangle + |t|^2 \|z\|^2$$

恒成立. 唯一的可能即为 $\langle x - x_0, z\rangle = 0$, 这就证明了 $x - x_0 \perp M$.

由上面的讨论, 我们再次得到了投影定理.

推论 1.3.4 (投影定理) 设 M 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的一个闭线性子空间, 则对于任意的 $x \in \mathcal{H}$, 存在唯一的 $x_0 \in M$, 使得 $\|x - x_0\| = d(x, M)$, 并且 $x_0 \perp x - x_0$.

推论 (1.3.4) 说明用 M 中的元 y 来逼近 x 时, 当且仅当 y 等于 x 在 M 上的投影 x_0 时, 逼近的程度最好. 投影的这个性质常常被用来研究最佳逼近问题, 也是凸分析理论的基础之一.

习题 1.3

1. 设 $\mathfrak{F}=\{e_\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}$ 是 Hilbert 空间 H 的标准正交基. 证明: 对任何 $x,y\in H$,

$$\langle x,y\rangle=\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle x,e_\lambda\rangle\overline{\langle y,e_\lambda\rangle}.$$

2. 设 $\{e_\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}$ 是 Hilbert 空间 H 上的标准正交基. 定义线性空间

$$\widetilde{H}=\left\{f\text{ 是 }\Lambda\text{ 上函数}:\sum_{\lambda\in\Lambda}|f(\lambda)|^2<\infty\right\},$$

并规定 $\widetilde{H}$ 上内积为

$$\langle f,g\rangle=\sum_{\lambda\in\Lambda}f(\lambda)\overline{g(\lambda)},\quad \forall f,g\in\widetilde{H}.$$

证明 $\widetilde{H}$ 按 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 成为 Hilbert 空间, 并且和 H 是 (保持内积线性) 同构的. 从而说明, 两个 Hilbert 空间 H_1 与 H_2 是 (保持内积线性) 空间同构的充要条件是它们的标准正交基的势相同.

3. 令 $L^2([0,2\pi]\times[0,2\pi])$ 上的内积为

$$\langle f,g\rangle=\iint\limits_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}f(x,y)\overline{g(x,y)}\,\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{4\pi^2}.$$

证明: $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ny}:m,n\in\mathbb{Z}\}$ 构成 $L^2([0,2\pi]\times[0,2\pi])$ 的一组标准正交基.

4. 设 X 是一个线性空间, 证明: X 中存在一组 Hamel 基.

5. 基本假设如例 1.3.8, 证明:
   (i) $\{h_n:n=0,1,\cdots,n\}$ 是一组标准正交系;
   (ii) $\{h_n:n=0,1,\cdots,n\}$ 是一组标准正交基.

6. 设 $\mathbb{D}=\{z\colon z\in\mathbb{C},|z|<1\}$ 是复平面中的开单位圆盘. 令

$$L_a^2(\mathbb{D})=\left\{f\colon f\text{ 在 }\mathbb{D}\text{ 中解析, 并且 }\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^2\,\mathrm{d}A(z)<+\infty\right\}.$$

在 $L_a^2(\mathbb{D})$ 中定义内积:

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}f(z)\overline{g(z)}\mathrm{d}A(z).$$

证明 $L_a^2(\mathbb{D})$ 是 Hilbert 空间 (称为 Bergman (伯格曼) 空间), 并且有标准正交基:

$$e_n(z)=\sqrt{n+1}z^n,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

7. 设 $\omega(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 可积的非负函数. 令

$$H=\left\{f\text{ 是 }\mathbb{R}\text{ 上 Lebesgue 可测函数}:\int_{\mathbb{R}}|f(t)|^2\,\omega(t)\mathrm{d}t<\infty\right\}$$

证明: H 按通常函数的线性运算以及内积

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{R}}f(t)\overline{g(t)}\omega(t)\mathrm{d}t,\quad \forall f,g\in H$$

成为 Hilbert 空间.

8. 设 $\mathcal{F}=\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$ 是 Hilbert 空间 $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的一组标准正交系, 将 $\mathcal{F}$ 重排成另一个序列 $\{e_1',e_2',\cdots,e_n',\cdots\}$. 证明: 对于 $x\in H$,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k'\rangle e_k'.$$

9. 设 H 是 Hilbert 空间, L 是一个可数维的 (即 Hamel 基的势是可数的) 线性子空间, 若 $\overline{L}=H$, 则 H 存在由 L 中的向量组成的标准正交基.

10. 令 $f_0=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(\cos nx+\sin nx)$. 设 H 是 $L^2[0,2\pi]$ 中由

$$\{f_0,\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$$

张成的线性子空间. 给出 H 中的一组完全标准正交系, 但不是完备的.

11. 设 $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是内积空间, $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\varLambda}$ 是内积空间中的一组标准正交系, 则下列条件等价:
   (i) $\overline{\operatorname{span}}\{e_\lambda\}_{\lambda\in\varLambda}=\mathcal{H}$;
   (ii) 对任意 $x\in H$, $\sum\limits_{\lambda\in\varLambda}|\langle x,e_\lambda\rangle|^2$ 存在且等于 $\|x\|^2$;
   (iii) 对任意 $x\in H$, $\sum\limits_{\lambda\in\varLambda}\langle x,e_\lambda\rangle e_\lambda$ 存在且等于 x.

12. 设 $\left\{x_0^i,x_1^i,\cdots,x_n^i\right\}(i=1,2,\cdots,m)$ 是已知的实数组. 利用投影定理求实数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 使得

$$\sum_{i=1}^{m}\left(x_0^i-\sum_{j=1}^{n}x_j^i\alpha_j\right)^2$$

达到极小.

13. 举例说明投影定理 1.3.4 对于一般的内积空间不成立.

1.4 度量空间中的点集

本节将直线上点集的极限点、开集、闭集以及稠密性等概念推广到一般的度量空间中. 由于大多数定义的叙述和定理的证明几乎可以平行地移植过来, 因此, 我们在此只作简短陈述.

开集、闭集和连续映射

类似于直线上点集的内点, 我们引入如下的概念:

定义 1.4.1 设 A 是度量空间 (X,d) 中的点集, $x_0\in A$.

(i) 如果存在 $r>0$ 使得 $\{x\in X\colon d(x,x_0)<r\}\subseteq A$, 则称 x_0 是 A 的内点.

(ii) A 的内点全体构成的点集称为 A 的 (拓扑) 内部, 记作 A°.

(iii) 如果 A 中每一点都是 A 的内点, 就称 A 是开集.

(iv) 规定空集也是开集.

例 1.4.1　在度量空间 (X,d) 中, 对于 $x_0\in X, r>0$, 集 $O(x_0,r)=\{x\in X\colon d(x,x_0)<r\}$ 称为开球, 也叫做 x_0 的 $r-$ 邻域. 容易看出, 开球 $O(x_0,r)$ 是开集.

这是因为, 如果 $z\in O(x_0,r)$, 那么 $d(z,x_0)<r$. 取正数 $\varepsilon<r-d(z,x_0)$, 则当 $d(x,z)<\varepsilon$ 时, $d(x,x_0)\leqslant d(x,z)+d(z,x_0)<r$. 因此, $O(z,\varepsilon)\subset O(x_0,r)$. 因而 $O(x_0,r)$ 中每一点都是自己的内点, 所以球 $O(x_0,r)$ 是开集.

定义 1.4.2　设 (X,d) 是度量空间, $x_0\in X$. X 中包含 x_0 的任何开集 G 都称为 x_0 的邻域.

对度量空间 (X,d) 中点 x_0, 容易看出 $\left\{O\left(x_0,\dfrac{1}{n}\right)\colon n=1,2,\cdots\right\}$ 是 x_0 的一组邻域基, 即任何含有点 x_0 的开集都包含了一个半径足够小的开球 $O\left(x_0,\dfrac{1}{n}\right)$. 特别地, 度量空间的任意一点均存在一个可数的邻域基, 这是度量空间区别于一般拓扑空间的主要特性. 例如, $C[a,b]$ 按点态收敛诱导的拓扑就不存在可数邻域基, 因此这个拓扑是不可度量化的. 更详细的内容可阅读附录中局部凸空间的内容.

用邻域的概念, 我们可把收敛点列的概念改述如下: 点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛于点 x_0 等价于对于 x_0 的任何 ε–邻域 $O(x_0,\varepsilon)$, 存在自然数 N, 使得当 $n\geqslant N$ 时, $x_n\in O(x_0,\varepsilon)$.

定义 1.4.3　设 X 是度量空间, A 是 X 的子集.

(i) 设 $x_0\in X$, 如果存在一点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 使得 $x_n\neq x_0$ 且 $x_n\to x_0$, 那么称 x_0 是点集 A 的极限点.

(ii) A 的极限点全体构成的集称为 A 的导集, 记作 A'. 称 $\bar{A}=A\cup A'$ 是 A 的闭包.

(iii) 如果集合 A 的极限点全体 A' 都包含在 A 中, 就称 A 为闭集.

例 1.4.2　在度量空间 (X,d) 中, 对于 $x_0\in X, r>0$, 集 $B(x_0,r)=\{x\in X\colon d(x,x_0)\leqslant r\}$ 称为闭球. 显然闭球 $B(x_0,r)$ 是闭集.

仿照直线上函数的连续性, 在度量空间中可以引入映射连续性的概念.

定义 1.4.4　设 X 和 Y 是度量空间, f 是 X 到 Y 中的映射.

(i) 对于 X 中任意收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, 成立

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0),$$

则称映射 f 在点 x_0 是**连续**的.

(ii) 假如映射 f 在 X 的每一点都连续, 就称 f 是 X 上的**连续映射**.

特别地, 当空间 Y 是实数域 $\mathbb{R}$ (或复数域 $\mathbb{C}$) 时, 称 f 为连续实 (复) 函数.

例 1.4.3　设 F 是度量空间 (X,d) 的非空子集, 定义距离函数 $d(x,F)=\inf\limits_{z\in F} d(x,z)$.

由度量的三角不等式可得

$$|d(x_1,F)-d(x_2,F)| \leqslant d(x_1,x_2),$$

故 $x\mapsto d(x,F)$ 是 X 上的连续函数. 显然它还是一致连续的, 即对于任意 $\varepsilon>0$, 存在一致的 $\delta>0$ (此处取 $\delta=\varepsilon$ 即可), 使得当 $d(x_1,x_2)<\delta$ 时, $|d(x_1,F)-d(x_2,F)|<\varepsilon$.

类似于数学分析中的讨论, 可得如下结果.

定理 1.4.1 设 f 是度量空间 X 到度量空间 Y 中的映射, 那么下面条件等价:

(i) 映射 f 是连续的.

(ii) 对于任意 $x_0\in X, \varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对 x_0 在 X 中的邻域 $O(x_0,\delta)$, 有

$$f(O(x_0,\delta))\subset O(f(x_0),\varepsilon).$$

(iii) 空间 Y 中的任一开集 O 的原像 $f^{-1}(O)$ 是 X 中的开集.

(iv) 空间 Y 中的任一闭集 F 的原像 $f^{-1}(F)$ 是 X 中的闭集.

更详尽的内容可阅读附录中对度量空间中的拓扑性质的讨论, 我们将直接使用里面的结论.

1.4.1 稠密性和可分性

稠密性是度量空间 (特别是赋范线性空间) 理论中的重要概念之一.

定义 1.4.5 在度量空间 (X,d) 中, 对于 B 中一个子集 A, 我们称 A 在 B 中**稠密**是指 $B\subset\overline{A}$.

例 1.4.4 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的稠密子集.

例 1.4.5 对直线上的有界闭区间 $[a,b]$, 由数学分析中的 Weierstrass (魏尔斯特拉斯) 第一逼近定理, 多项式全体 P 在 $C[a,b]$ 中是稠密的.

例 1.4.6 对直线上有界闭区间 $[a,b]$ 及 $1\leqslant p<\infty$, $L^p[a,b]$ 中的简单函数全体, 阶梯函数全体, $C_c^\infty(a,b)$, $C[a,b]$ 以及多项式全体 P 均是 $L^p[a,b]$ 的稠密子集.

证明 (1) 由实变函数知识可知, 对任意 $f\in L^p[a,b]$, 可取 $[a,b]$ 上的简单函数列 $\{\phi_n\}$ 点态收敛于 f, 且 $|\phi_n|\leqslant|f|(\forall n\geqslant 1)$. 由控制收敛定理得

$$\|f-\phi_n\|_p^p=\int_{[a,b]}|f(x)-\phi_n(x)|^p\mathrm{d}m\to 0.$$

(2) 对 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 可测集 E, 由实变函数知识可知, 存在有限个开区间的并集 I_n 使得 $m(E\Delta I_n)\leqslant\dfrac{1}{n}$. 故此

$$\|\chi_{I_n}-\chi_E\|_p\leqslant\frac{1}{n^{1/p}}.$$

令 $n\to\infty$, 即得 χ_E 可由 $[a,b]$ 上的阶梯函数列 $\{\chi_{I_n}\}$ 逼近. 再由线性性可知,

$$\overline{L^p[a,b]\text{ 阶梯函数全体}}^{\|\cdot\|_p} \supseteq \overline{L^p[a,b]\text{ 简单函数全体}}^{\|\cdot\|_p} = L^p[a,b].$$

(3) 类似地, 只需说明对 $[a,b]$ 中的任意开区间 (c,d), 特征函数 $\chi_{(c,d)}$ 可由 $C_c^\infty(a,b)$ 中函数逼近即可. 我们直接构造出所需的函数 (实际源于卷积的技术). 令

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$$

显然 f 是直线上的无穷阶可微函数. 那么, 易得

$$g(x)=\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t}$$

也是直线上的无穷阶可微函数, 且当 $x\leqslant -1$ 时, $g(x)=0$, 当 $x\geqslant 1$ 时, $g(x)=1$. 故此, 函数列 $h_n(x)=g(n(x-c)-2)g(n(d-x)-2)\in C_c^\infty(a,b)$. 当 $n\to\infty$ 时, $\{h_n\}$ 点态收敛于 $\chi_{(c,d)}$, 再由控制收敛定理知它也依 p 范数收敛于 $\chi_{(c,d)}$.

(4) 由 (3) 以及 Weierstrass 第一逼近定理可得, $C[a,b]$ 以及 P 也在 $L^p[a,b]$ 中稠密.

□

注 1.4.1 (i) 类似地, 可得 $L^p(\mathbb{R})(1\leqslant p<\infty)$ 中的简单函数全体, 阶梯函数全体以及 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 均是稠密子集.

(ii) 然而, 在 $L^\infty[a,b]$ 中, 只有简单函数全体是稠密子集.

定义 1.4.6 设 X 是度量空间. 如果存在某个可数子集在 X 中稠密, 就称 X 是**可分空间**.

我们遇到的一些具体度量空间往往是可分空间. 由于可分空间有稠密可列子集, 研究起来就比较容易. 当我们讨论有关这类空间的某些问题时, 往往可以从空间中挑选出对问题最适宜的一个可列稠密子集, 先在这个稠密子集上进行考察, 然后再利用稠密性推广到整个空间上去.

例 1.4.7 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 按通常度量是可分空间. 这是因为坐标为有理数的点的全体是可列集, 并且在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

例 1.4.8 空间 $l^p(1\leqslant p<\infty)$ 是可分的.

证明 因为集合

$$A=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,0,0,\cdots): x_i\in\mathbb{Q}, i=1,2,\cdots,n\}$$

是可列集, 它在 l^p 中稠密. 实际上, 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^p$. 对于任意的 $\varepsilon>0$, 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty$, 故存在正整数 N 使得 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}|x_n|^p<\varepsilon^p$. 再取有理数 $y_1,y_2,\cdots,y_N$

使得 $\sum_{i=1}^{N}|x_i-y_i|^p<\varepsilon^p$. 令 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_N,0,\cdots)$, 则有 $\|x-y\|_p<2\varepsilon$. □

例 1.4.9 $C[a,b]$ 和 $L^p[a,b](1\leqslant p<\infty)$ 是可分空间.

这是因为多项式全体在 $C[a,b]$ 和 $L^p[a,b]$ 中稠密, 而对任意的多项式 $P(x)$, 存在以有理数为系数的多项式 $p(x)$ 满足: $\|P-p\|_\infty<\varepsilon$ 或者 $\|P-p\|_p<\varepsilon$.

下面我们给出稠密性的一个基本事实.

命题 1.4.1 设度量空间 (X,d) 是可分的, A 为 X 的子集, 则度量空间 (A,d) 也是可分的.

证明 设 $\mathfrak{F}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$ 是 X 的稠密子集. 对任意 n,k, 若 $O\left(x_n,\dfrac{1}{k}\right)\cap A\neq\varnothing$, 就取一点 $y_{n,k}\in O\left(x_n,\dfrac{1}{k}\right)\cap A$, 若 $O\left(x_n,\dfrac{1}{k}\right)\cap A=\varnothing$, 则令 $y_{n,k}$ 为 A 中任取的一点.

那么, $\{y_{n,k}\}_{n,k}$ 为可数集且在 A 中稠密: 对任意 $y\in A$ 及 $\varepsilon>0$, 可取正整数 k_0 及 $x_{n_0}\in\mathfrak{F}$, 使得 $\dfrac{1}{k_0}<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 且 $y\in O\left(x_{n_0},\dfrac{1}{k_0}\right)$. 由于 $y_{n_0,k_0}\in O\left(x_{n_0},\dfrac{1}{k_0}\right)$, 故

$$y\in O\left(x_{n_0},\frac{1}{k_0}\right)\subset O\left(y_{n_0,k_0},\frac{2}{k_0}\right)\subset O(y_{n_0,k_0},\varepsilon).$$ □

利用这个结果, 我们来看 l^∞ 的可分性质.

例 1.4.10 有界数列全体组成的空间 l^∞ 是不可分的.

证明 集合 $A=\{(x_1,x_2,\cdots):x_i=0,1\}$ 是 l^∞ 的子集, 它是不可数的, 并且对于 A 中的任意两个不同元素 x,y, 有 $\|x-y\|_\infty=1$. 因此 A 的任意真子集都不在 A 中稠密, 特别地, A 是不可分的. 由上面的命题, 即得 l^∞ 也是不可分的. □

我们也可以类似地考虑 $L^\infty[a,b]$ 的情况.

例 1.4.11 空间 $L^\infty[a,b]$ 是不可分的.

证明 取 $A=\{\chi_{[a,x]}:x\in(a,b]\}$, 使用与上例同样的讨论即得所需结论. □

1.4.2 完备性

首先我们回顾完备性的定义.

定义 1.4.7 设 (X,d) 是度量空间.

(i) 设 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 X 中的点列. 如果对于任一正数 ε, 存在正整数 N, 使得当 n, $m\geqslant N$ 时,

$$d(x_n,x_m)<\varepsilon,$$

就称 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 X 中的基本点列, 或者称为 Cauchy 点列.

(ii) 若度量空间 X 中每个基本点列都收敛, 则称 X 是完备度量空间.

(iii) 完备的赋范线性空间称为 Banach 空间.

(iv) 完备的内积空间称为 Hilbert 空间.

(v) 设 A 是 X 的子空间, 如果 A 作为度量空间是完备的, 那么称 A 是 X 的完备子空间.

例 1.4.12　(i) 有理数集作为直线的子空间不是完备的. 例如 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是基本列, 但是在有理数空间中它不收敛.

(ii) 作为直线的子空间, 集合 $\left\{\dfrac{1}{n}: n=1,2,\cdots\right\}$ 不是完备的度量空间. 而集合 $\left\{\dfrac{1}{n}: n=1,2,\cdots\right\}\cup\{0\}$ 是完备的度量空间.

(iii) 作为直线 $(\mathbb{R},d_1)$ 的子空间, 正整数集 $\mathbb{N}_+$ 是完备的度量空间. 然而, 若在 $\mathbb{N}_+$ 上定义新度量 $d(n,m)=\left|\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{m}\right|$, 容易看出在 $(\mathbb{N}_+,d_1)$ 和 $(\mathbb{N}_+,d)$ 中收敛性是一致的, 但 $(\mathbb{N}_+,d)$ 不是完备的.

引理 1.4.1　(i) 度量空间 X 中收敛点列是基本点列.

(ii) 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是度量空间 X 中基本点列, 如果 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛于 X 中的点 x, 那么 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也收敛于 x.

(iii) 完备度量空间的闭子集是完备子空间.

(iv) 任何度量空间的完备子空间是闭子集.

证明　这里只证明 (ii). 因为 $\{x_n\}$ 是基本点列, 所以对任何 ε, 有正整数 N, 当 $n,m\geqslant N$ 时,

$$d(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又因为子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 x, 所以存在 $N'>N$, 当 $n_k\geqslant N'$ 时, $d(x_{n_k},x)<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 由此可知, 当 $n\geqslant N$ 时, 取 $n_k\geqslant N'$, 我们有

$$d(x_n,x)\leqslant d(x_n,x_{n_k})+d(x_{n_k},x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即 $\{x_n\}$ 收敛于 x. □

注 1.4.2　一个不完备的度量空间可以有完备的子空间. 例如, 有理数组成的度量空间 $\mathbb{Q}$ 不是完备的, 但是其中的子空间 $\mathbb{Z}$ 是完备的. 再如, 区间 $[0,1]$ 上的多项式全体 P, 以最大模为范数, 是一个不完备的赋范线性空间, 但是由 n 个向量 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 生成的 n 维子空间是完备的.

我们利用 (ii) 来给出 L^p 空间完备性的一个完整证明.

例 1.4.13　设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 Lebesgue 可测集, 则空间 $L^p(E)(1\leqslant p<\infty)$ 是

Banach 空间. 特别地, $L^2(E)$ 是 Hilbert 空间.

证明 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L^p(E)$ 中的基本点列, 那么对任何正整数 n, 存在 k_n 满足 $k_n < k_{n+1}$ 以及

$$\left\|f_{k_{n+1}} - f_{k_n}\right\|_p < \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

令

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \left|f_{k_{i+1}}(x) - f_{k_i}(x)\right| + \left|f_{k_1}(x)\right|, \quad \forall x \in E.$$

于是, $\{u_n\}$ 是 E 上单调增加的函数列, 且 $\|u_n\|_p \leqslant 1 + \|f_{k_1}\|_p$, 即

$$\left\{\int_E u_n(x)^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant 1 + \|f_{k_1}\|_p.$$

由 Levi (莱维) 引理, 我们得到:$u_n(x)^p$ 几乎处处收敛于一个可积函数, 于是 $u_n(x)$ 几乎处处收敛于一个几乎处处有限的可测函数, 由此得到: $f_{k_n}(x)$ 几乎处处收敛于一个可测函数 $f(x)$.

由于 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L^p(E)$ 中的基本点列, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N, 当 $m, k_n \geqslant N$ 时, 有

$$\int_E |f_m(x) - f_{k_n}(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon^p.$$

令 $n \to \infty$, 由 Fatou 引理即得 $\displaystyle\int_E |f_m(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon^p$. 于是, $f = f_m - (f_m - f) \in L^p(E)$, 以及 f_n 按 $\|\cdot\|_p$ 收敛于 f, 即 $L^p(E)$ 是完备的. □

使用相似的方式, 容易验证下面的例子.

例 1.4.14 (商空间) 设 X 是线性空间, M 是 X 的一个线性子空间. 对 $x \in X$, 我们考虑 X 的子集 $\{x + y \colon y \in M\}$, 这个子集随着 x 变化而变化. 记 X 中这种子集的全体构成的集合为 X/M. 将子集 $\{x + y \colon y \in M\}$ 记为 $[x]$, 称 x 为子集 $[x]$ 的代表元. 那么, $[x] = [x']$ 的充要条件是 $x - x' \in M$.

在 X/M 中可自然地规定线性运算如下:

$$[x] + [y] = [x + y], \quad \forall x, y \in X,$$
$$\alpha[x] = [\alpha x], \quad \forall \alpha \text{ 是数}.$$

容易验证, 这样定义的线性运算是有确定的意义的, X/M 按这样规定的线性运算成为线性空间, 称 X/M 为 X 关于 M 的商空间. 如果定义从 X 到 X/M 的映射 $\pi \colon x \mapsto [x]$, 证明 π 是线性空间 X 到商空间 X/M 的线性映射, 这个映射称为商映射.

设 M 是赋范线性空间 X 的 闭 的线性子空间. 在商空间 X/M 上定义范数为: 对 X/M 中的元素 $[x]$, 任取代表元 $x \in [x]$, 定义

$$\|[x]\| = d(x, M) = \inf_{y \in M} \|x + y\|,$$

显然这一定义与 x 的选取无关, 是良定义的. 容易验证 $\|\cdot\|$ 满足范数的条件, 从而 $(X/M, \|\cdot\|)$ 构成了一个赋范线性空间.

特别地, 当 X 是 Banach 空间时, 商空间 $(X/M, \|\cdot\|)$ 也是一个 Banach 空间 (见习题 1.4 第 19 题).

而且, 容易验证商映射 $\pi(x) = [x] : X \to X/M$ 将 X 的开单位球映为商空间 X/M 的开单位球. 从而将 X 中的开集映为开集, 故它是一个开映射 (见习题 20).

对于有限维线性空间, 有如下一般性结论.

定理 1.4.2 *有限维的赋范线性空间是完备的.*

证明 设 X 是 n 维的赋范线性空间, 取其一组线性无关基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$. 那么, 我们断言存在正实数 c_1, c_2, 使得对于 X 中的每个 $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, 成立

$$c_1 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \leqslant \|x\| \leqslant c_2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}. \tag{1.21}$$

实际上, 在 $\mathbb{R}^n$ 的单位球面 $S^{n-1} = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 1\right\}$ 上作函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right\|.$$

显然 f 在 S^{n-1} 上连续, 且不取零值. 再由 S^{n-1} 的紧性, 存在正实数 c_1, c_2 使得对任意 $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 1$ 有 $c_1 \leqslant \left\|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i\right\| \leqslant c_2$. 再由齐次性即得 (1.21) 式.

由此可知, 赋范线性空间 X 与 $\mathbb{R}^n$ 是拓扑同胚, 序列 $\left\{x^{(k)} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{(k)} e_i\right\}$ 是 Cauchy 点列 (或收敛点列) 当且仅当每个坐标 $x_i^{(k)}$ 也是 Cauchy 点列 (或收敛点列). 从而易得 X 是完备的. □

又由于完备的线性子空间总是闭子空间, 我们有如下推论.

推论 1.4.1 *赋范线性空间 X 的有限维线性子空间在 X 中是闭的.*

例 1.4.15 如果在连续函数空间 $C[0,1]$ 上定义范数

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x,$$

就是把 $C[a,b]$ 看成 $L^1[a,b]$ 的子空间, 那么 $(C[a,b], \|\cdot\|_1)$ 不是完备的空间.

证明 构造函数列 $\{f_n(x)\} (n \geqslant 2)$ 如下:

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2},\\ 1-n\left(x-\dfrac{1}{2}\right), & \dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n},\\ 0, & \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

那么 $f_n(x)\in C[0,1]$. 不难证明, 对于 $[0,1]$ 中每一点 x, $f_n(x)$ 收敛于函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2},\\ 0, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

由 Lebesgue 控制收敛定理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}m(x)=0$, 从而

$$\|f_n-f_m\|_1\to 0,\quad n,m\to\infty.$$

但 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $(C[0,1],\|\cdot\|_1)$ 中并不收敛. 因为如果有 $g\in C[0,1]$ 使得 $\|f_n-g\|_1\to 0$, 则 $\displaystyle\int_0^1|f-g|\mathrm{d}m=0$, 所以 $f(x)\underset{m}{\doteq}g(x)$. 但是容易看出, $f(x)$ 不可能在 $[0,1]$ 上几乎处处等于一个连续函数, 所以 $(C[0,1],\|\cdot\|_1)$ 是不完备的赋范线性空间. □

对于一个不完备的度量空间, 应用起来通常是比较困难的. 但是, 使用类似于从有理数域 $\mathbb{Q}$ 获得实数域 $\mathbb{R}$ 的过程, 我们把 Cauchy 列作为一个 "新点" 增加到原有的空间, 所得的新空间就是完备的.

定义 1.4.8 设 (X,d) 是度量空间, 称 $(Y,\tilde{d})$ 是 X 的一个完备化空间, 是指: Y 是完备度量空间, 且存在一个嵌入单射 $j:X\hookrightarrow Y$, 满足下列条件:

(i) 嵌入 j 是等距: 对于任意 $x_1,x_2\in X,\tilde{d}(j(x_1),j(x_2))=d(x_1,x_2)$;

(ii) $j(X)$ 在 Y 中稠密.

定理 1.4.3 (度量空间的完备化定理) 任意的度量空间 (X,d) 都有唯一 (在等距同构意义下) 的完备化度量空间.

证明 唯一性. 设 $i_1:X\to Y_1$ 和 $i_2:X\to Y_2$ 是度量空间 (X,d) 的两个完备化, 则 $\phi(i_1(x))=i_2(x)$ 为 $i_1(X)$ 到 $i_2(X)$ 的等距双射. 我们利用 $i_1(X)$ 的稠密性将映射延拓到 Y_1 上: 对任意 $y_1\in Y_1$, 取一个序列 $\{i_1(x_n)\}$ 收敛于 y_1, 则令 $\phi(y_1)=\lim\limits_{n\to\infty}i_2(x_n)$. 容易看出, ϕ 的定义与点列 $\{i_1(x_n)\}$ 的选取无关: 若另一个点列 $\{i_1(x_n')\}$ 也收敛于 y_1, 则 $d(x_n,x_n')\to 0$, 因此 $d(i_2(x_n),i_2(x_n'))\to 0$, 从而 $i_2(x_n)$ 与 $i_2(x_n')$ 在 Y_2 中的极限是相同的. 这就是说 ϕ 是良定义的. 易证 ϕ 为 Y_1 到 Y_2 的等距单射. 只需再证明 ϕ 是满射: 对于 $y_2\in Y_2$, 取一个序列 $\{i_2(x_n)\}$ 收敛于 y_2, 则 $y_1=\lim\limits_{n\to\infty}i_1(x_n)$ 为 y_2 的原像.

存在性. 我们直接构造一个 X 的完备化空间. 令

$$Y'=\left\{\{x_n\}:\{x_n\}\text{ 是 }X\text{ 中的基本点列}\right\}.$$

在 Y' 中定义非负的二元函数 $d'(\{x_n\},\{y_n\})=\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)$, 易见这是一个良定义的函数, 且满足度量的对称性与三角不等式. 然而, d' 有可能无法区分 Y' 的两个点. 为解决这个问题, 我们考虑 Y' 的商空间.

在 Y' 上定义等价关系 $\sim$: $\{x_n\}\sim\{y_n\}\Longleftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0$. 令

$$\tilde{Y}=Y'/\sim=\left\{[\{x_n\}]:\{x_n\}\text{ 是 }X\text{ 中的基本点列}\right\},$$

则 $\tilde{Y}$ 是 Y' 在 $\sim$ 下的商空间. 在 $\tilde{Y}$ 上定义

$$\tilde{d}([\{x_n\}],[\{y_n\}])=d'(\{x_n\},\{y_n\})=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n),$$

直接验证可得 $\tilde{d}$ 是 $\tilde{Y}$ 上良定义的度量.

这时, 我们构造嵌入映射 $i:X\to\tilde{Y}$ 如下: 对于 $x\in X$, 记 $\bar{x}=\{x,x,\cdots\}$ 为一个常值序列, 则定义 $i(x)=[\bar{x}]$. 显然 $\tilde{d}(i(x_1),i(x_2))=d(x_1,x_2)$, 即 i 是等距嵌入.

接下来证明 $i(X)$ 在 $\tilde{Y}$ 中稠密: 任取 $\tilde{Y}$ 中一点 $[\{x_n\}]$, 由于 $\{x_n\}$ 是 X 中的基本点列, 故其在映射 i 下的像 $\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots\}$ 也是 Y' 的基本列, 且当 $k\to\infty$ 时,

$$\lim_{k\to\infty}d'(\bar{x}_k,\{x_n\})=\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}d(x_k,x_n)=0.$$

这也就是说 $\tilde{Y}$ 中点列 $[\bar{x}_k]$ 收敛于 $[\{x_n\}]$.

最后再证明 $\tilde{Y}$ 是完备的度量空间. 设 $\left\{[x^{(n)}]\right\}$ 是 $\tilde{Y}$ 的一个基本点列, 其中 $x^{(n)}=\{x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_m^{(n)},\cdots\}\in Y'$. 我们构造一个 X 中的序列与 $x^{(n)}$ 任意接近.

对每个固定的 n, 由于 $x^{(n)}\in Y'$, 可取序列 $x^{(n)}$ 中的一个元素 $x_{k_n}^{(n)}$ 使得 $d'(\overline{x_{k_n}^{(n)}},x^{(n)})<\dfrac{1}{n}$. 那么, $x=\left\{x_{k_n}^{(n)}\right\}$ 是 X 中的一个基本点列, 这由下面的式子可以看出:

$$\begin{aligned}
d(x_{k_n}^{(n)},x_{k_m}^{(m)})&=d'(\overline{x_{k_n}^{(n)}},\overline{x_{k_m}^{(m)}})\\
&\leqslant d'(\overline{x_{k_n}^{(n)}},x^{(n)})+d'(\overline{x_{k_m}^{(m)}},x^{(m)})+d'(x^{(m)},x^{(n)})\\
&\leqslant\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+d'(x^{(m)},x^{(n)})\to 0.
\end{aligned}$$

并且易得 $\lim\limits_{n\to\infty}d'(x,x^{(n)})=0$. 事实上, 由 $\overline{x_{k_n}^{(n)}}\to x$ 可以得到

$$d'(x^{(n)},x)\leqslant d'(x^{(n)},\overline{x_{k_n}^{(n)}})+d'(\overline{x_{k_n}^{(n)}},x)\leqslant\frac{1}{n}+d'(\overline{x_{k_n}^{(n)}},x)\to 0.$$

这也就是说, $[x]$ 为 $\left\{[x^{(n)}]\right\}$ 在 $\tilde{Y}$ 中的极限, $\tilde{Y}$ 是完备的. □

例 1.4.16 由例 1.4.15 知, $C[a,b]$ 按 $\|\cdot\|_1$ 不是完备的. 此时, 将 $C[a,b]$ 自然嵌入到 $L^1[a,b]$, 那么这个嵌入是一个等距映射, 而且像集在 $L^1[a,b]$ 中稠密. 因此 $(C[a,b],\|\cdot\|_1)$ 的完备化空间就是 $L^1[a,b]$.

1.4.3 闭球套定理

直线上的区间套定理在完备度量空间中依旧成立, 证明方法也是相似的.

定理 1.4.4 (闭球套定理) 设 X 是完备的度量空间, $B_n = \{x \in X : d(x, x_n) \leqslant \varepsilon_n\}$ 是 X 中的一列单调下降的闭球:

$$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots.$$

如果球的半径 $\varepsilon_n \to 0$, 则有唯一的点 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

证明 球心所组成的点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是基本点列, 这是因为当 $m \geqslant n$ 时, 由 $x_m \in B_m \subset B_n$ 得到

$$d(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon_n. \tag{1.22}$$

对于任一正数 ε, 取 N, 使得当 $n \geqslant N$ 时, $\varepsilon_n < \varepsilon$, 于是当 $n, m \geqslant N$ 时,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

所以 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是基本点列. 由于空间 X 是完备的, 点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 X 中的一点 x. 再在 (1.22) 式中令 $m \to \infty$, 根据度量的连续性得到

$$d(x, x_n) \leqslant \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因此 $x \in B_n (n = 1, 2, \cdots)$, 也即 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

如果又有 X 中的点 $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, 那么

$$d(y, x_n) \leqslant \varepsilon_n,$$

令 $n \to \infty$ 即得 $d(y, x) = \lim_{n \to \infty} d(y, x_n) = 0$, 所以 $y = x$, 即 $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ 中只有一点. □

例 1.4.17 条件中 $\varepsilon_n \to 0$ 是必须的. 考虑 l^2 的子空间

$$X = \left\{ x_n = \left(0, 0, \cdots, 0, \frac{n+1}{n}, 0, \cdots\right) : n = 1, 2, \cdots \right\}.$$

于是当 $n \neq m$ 时,

$$d(x_n, x_m) = \sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 + \left(\frac{m+1}{m}\right)^2} \geqslant \sqrt{2}.$$

因此 X 中没有非平凡的基本点列, 当然 X 就成为完备的度量空间. 取 $\varepsilon_n = \sqrt{2}\frac{n+1}{n}$, 在 X 中作闭球

$$B_n = \{x \in X : d(x_n, x) \leqslant \varepsilon_n\}, n = 1, 2, \cdots,$$

那么 $B_n = \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$, 所以 $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$, 但是, 交集 $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ 是空集.

其实, 闭球套定理是与度量空间的完备性等价的, 即有如下逆命题.

定理 1.4.5　*设 X 是度量空间. 如果在 X 上闭球套定理成立, 那么 X 是完备的.*

证明　对于 X 中 Cauchy 列 $\{x_n\}$, 取它的子列 $\{x_{k_n}\}$, 使得 $d(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$. 那么, 对于任意 $m > n$,

$$d(x_{k_n}, x_{k_m}) \leqslant d(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) + d(x_{k_{n+1}}, x_{k_{n+2}}) + \cdots + d(x_{k_{m-1}}, x_{k_m}) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

再取一列闭球 $B_n = B\left(x_{k_n}, \dfrac{1}{2^n}\right)$. 由于 $y \in B_{n+1}$ 时, 我们有

$$d(y, x_{k_n}) \leqslant d(y, x_{k_{n+1}}) + d(x_{k_{n+1}}, x_{k_n}) \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n},$$

故 $B_n \supset B_{n+1}$. 由定理条件得, 存在 $x \in X$ 使得 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. 这就是说子列 x_{k_n} 收敛于 x, 从而 x_n 也收敛于 x, 即 X 是完备的度量空间. □

习题 1.4

1. 举例说明, 存在度量空间 X 及点 $x_1, x_2 \in X$, 使得 $B(x_1, 3) \subsetneqq O(x_2, 2)$.
2. 设 B 是度量空间中的闭集, 证明存在一个递减开集列 $\{O_1, O_2, \cdots, O_n, \cdots\}$, 使得每个 O_n 包含 B 且 $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n = B$.
3. 设 $B \subset [0,1], a > 0$, 证明度量空间 $C[0,1]$ 中的子集

$$\{x\colon\ |x(t)| < a, \forall t \in B\}$$

为开集的充要条件是: B 为闭集.

4. 设 E, F 是度量空间 X 中的两个子集并且 $d(E,F) \overset{\text{def}}{=\!=} \inf\limits_{x \in E, y \in F} d(x,y) > 0$. 证明: 存在两个互不相交的开集 O, G 分别包含 E 和 F.
5. 设 $f(x)$ 是度量空间 X 上的实函数. 如果对于任意点 $x_0 \in X$, 有

$$\lim_{r \to 0} \sup_{x \in O(x_0, r)} f(x) \leqslant f(x_0),$$

就称 $f(x)$ 在 X 上是上半连续的. 证明: 当 $f(x)$ 是 X 上的上半连续函数时, 对任何常数 a, 集合

$$X(f \geqslant a) \overset{\text{def}}{=\!=} \{x\colon\ f(x) \geqslant a\}$$

是闭集. 反之也真.

6. 设 S_1, S_2 是度量空间 (X, d) 中两个子集, 并且

$$d(S_1, S_2) \xlongequal{\text{def}} \inf_{x \in S_1, y \in S_2} d(x, y) > 0.$$

构造 X 上一个具体的连续函数 f, 使得 $0 \leqslant f \leqslant 1$, 且满足

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in S_1, \\ 1, & x \in S_2. \end{cases}$$

7. 设 X 是可分的度量空间, $A \subset X$, $\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是 A 的开覆盖. 证明: 可从 $\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 中选出至多可列个开集 $\{O_{\lambda_n}\}$, 使得 $\bigcup\limits_n O_{\lambda_n} \supset A$.
8. 在直线 $\mathbb{R}$ 上, 证明:
   (i) $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 在 $L^p(\mathbb{R})(1 \leqslant p < \infty)$ 中稠密.
   (ii) $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 不在 $L^\infty(\mathbb{R})$ 中稠密.
   (iii) 多项式全体不在 $L^p(\mathbb{R})(1 \leqslant p < \infty)$ 中稠密.
9. 对 $1 \leqslant p < \infty$, 定义 Banach 空间

$$L^p(\mathbb{R}, \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t) = \left\{ f \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上 Lebesgue 可测} : \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

   证明: $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 在 $L^p(\mathbb{R}, \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t)$ 中稠密. 判断多项式全体是否为稠密集 (无须证明).
10. 设 $C_{2\pi} = \{f \in C[0, 2\pi] : f(0) = f(2\pi)\}$, 并按范数 $\|f\| = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} |f(t)|$ 成一赋范空间. 证明:
    (i) 令 $\mathcal{P} = \{f \in C_{2\pi} :$ 存在多项式 P 使得 $f(t) = P(t), \forall 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$, 则 $\mathcal{P}$ 在 $C_{2\pi}$ 中稠密.
    (ii) $C_{2\pi}$ 在 $L^p[0, 2\pi](1 \leqslant p < \infty)$ 中稠密, 但不在 $L^\infty[0, 2\pi]$ 中稠密.
    (iii) 将 $C_{2\pi}$ 中函数零延拓为 $[0, 4\pi]$ 上的函数, 则 $C_{2\pi}$ 在 $L^p[0, 4\pi](1 \leqslant p < \infty)$ 中不稠密.
11. 证明: $L^p(\mathbb{R})(1 \leqslant p < \infty)$ 是可分空间.
12. 令 $C_b(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$ 上有界的连续函数全体构成的 Banach 空间, 它的范数 $\|x\| = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|$. 令 $C_0(\mathbb{R}) = \{f \in C_b(\mathbb{R}) : \lim\limits_{t \to \pm\infty} x(t) = 0\}$ 为 $C_b(\mathbb{R})$ 的线性子空间. 证明:
    (i) $C_0(\mathbb{R})$ 是可分的.
    (ii) $C_b(\mathbb{R})$ 不是可分的.
13. 设 H 是 Hilbert 空间, 证明 H 可分等价于 H 存在一组可数的正交基.
14. **(Fourier 变换的 Riemann-Lebesgue 引理)** 对 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 证明:

$$\lim_{|t| \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t x} \mathrm{d}x = 0.$$

15. **(平均连续性)** 对 $f \in L^p(\mathbb{R}), 1 \leqslant p < \infty$, 证明:

$$\lim_{|h| \to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p \mathrm{d}x = 0.$$

16. 对赋范线性空间 X, 证明: X 是完备的当且仅当对任意 X 中点列 $\{x_n\}$, 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ 时,

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 在 X 中收敛.

17. 证明: $V[a,b], V_0[a,b]$ 是 Banach 空间 (见例 1.2.10).
18. 设 H 是直线上 Lebesgue 平方可积, 且导函数也平方可积的绝对连续函数全体. 按通常的线性运算及范数

$$\|f\| = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t},$$

H 成为赋范线性空间. 证明: H 是 Hilbert 空间.

19. 如果 X 是赋范线性空间, M 是 X 的闭线性子空间. 在商空间 X/M 上定义

$$\|[x]\| = \inf\{\|x+y\| : y \in M\}.$$

证明:
   (i) $\|[x]\|$ 是线性空间 X/M 上的范数. 举例说明, 若 M 不是闭的线性子空间, 则这个结论不正确.
   (ii) 若 X 是内积空间, 则 X/M 也是内积空间, 并且与 $M^{\perp}$ 是内积空间同构.
   (iii) 若 X 是 Banach 空间, 则 X/M 也是 Banach 空间.

定义 (开映射)　设 X, Y 是度量空间, 如果映射 $g : X \to Y$ 把定义域 X 中的每个开集映射成值域 Y 中的开集, 那么就称 g 是开映射.

20. 如果 E 是赋范线性空间, M 是 E 的闭线性子空间. 证明商映射 $\pi : E \to E/M$ 是开映射.
21. 设 $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ 是线性空间 H 上的二元函数, 满足内积条件中的 (i), (ii) 以及 (iii) 中 $\langle x, x\rangle_0 \geqslant 0 (\forall x \in H)$. 如记 $p(x) = \langle x, x\rangle_0^{\frac{1}{2}}$, 证明:
   (i) $p(x)$ 是 H 中的半范数.
   (ii) $\ker p = \{x\colon p(x) = 0\}$ 是线性空间.
   (iii) 在商空间 $L = H/\ker p$ 上规定

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y}\rangle = \langle x, y\rangle_0, \quad \forall \tilde{x} \in L, \tilde{y} \in L, x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y}.$$

证明 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 L 上的内积.

22. 令 P 是多项式全体, 定义范数 $\left\|\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right\| = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$. 证明: $(P, \|\cdot\|)$ 不是完备的度量空间. 并求它的完备化空间.
23. 证明: 任何赋范线性空间都可以完备化成 Banach 空间, 内积空间都可以完备化成 Hilbert 空间.
24. **(再生核 Hilbert 空间)**　设集合 X 上一族复值函数族 $\{K_x(\cdot) : x \in X\}$ 满足:

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} K_{x_i}(x_j) > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,\ c_i \in \mathbb{C}, c_i \text{ 不全为零},\ x_i \neq x_j \text{ 若 } i \neq j.$$

证明: 存在 Hilbert 空间 $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, 使得
   (i) H 由 X 上的一些函数组成.
   (ii) 对任意 $f \in H$, $x \in X$, 有 $f(x) = \langle f, K_x\rangle$.
   (iii) 线性空间 $\mathrm{span}\{K_x(\cdot) : x \in X\}$ 在 H 中稠密.

25. 设 $\{F_n\}\,(n=1,2,\cdots)$ 是完备度量空间 X 中一列单调下降的非空闭集, 且 F_n 的直径 $d_n=\sup\limits_{x,y\in F_n} d(x,y)\to 0$, 则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ 非空.

26. 对于 Banach 空间 X, 若 $\{B(x_n,r_n)\}$ 是一列单调下降的闭球, 证明: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B(x_n,r_n)\neq\varnothing$.

定义 设 X 是赋范线性空间, 映射 $f:[a,b]\to X$ 有界. 若存在 $A\in X$, 使得对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任意划分 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 及任取的 $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}](i=0,1,\cdots,n-1)$, 当 $\delta(P)=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}(x_{i+1}-x_i)<\delta$ 时, 均有

$$\left\|A-\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)\right\|<\varepsilon,$$

则称 f 是 (Riemann) 可积的, 记作 $A=\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

27. 设 X 是 Banach 空间, 映射 $f:[0,1]\to X$ 连续. 证明:
   (i) 映射 f 是一致连续的.
   (ii) 对正整数 n, 将 $[0,1]$ 作 $\dfrac{1}{2^n}$ 等分, 记 Riemann 和

$$a_n=\sum_{i=0}^{2^n-1}\frac{1}{2^n}f\left(\frac{i}{2^n}\right),$$

   则 $\{a_n\}$ 在 X 中收敛. 记它的极限为 A.
   (iii) f 是可积的, 且积分值为 A.

1.5 压缩映射原理

把一些方程的求解问题化为求映射的不动点, 以及用逐次逼近法来求不动点, 这是一个很重要的方法. 这个方法起源很早, 一直可以追溯到 Newton (牛顿) 求代数方程根时所用的切线法, 后来 Picard (皮卡) 用逐次逼近法求解常微分方程. 1922 年, Banach 把这个方法的基本点提炼出来, 用度量空间以及其中的压缩算子的概念描述了这个方法, 这就是本节将要介绍的内容. 利用泛函分析来研究方程解的近似方法以及算子不动点的存在性, 自 Banach 以后又取得了不少重要的进展, 甚至成为非线性泛函分析的主要内容.

定义 1.5.1 设 X 为一集合, ϕ 是 X 到自身的映射. 如果 $x^*\in X$, 使得 $\phi(x^*)=x^*$, 那么称 x^* 为映射 ϕ 的一个不动点.

在不同的场合有各种不同的 “不动点定理”. 下面介绍一个最简单的定理, 有时称为 “压缩映射原理”.

定义 1.5.2 设 (X,d) 是度量空间, ϕ 是 X 到它自身的一个映射. 如果存在数 α,

$0 \leqslant \alpha < 1$, 使得对一切 $x, y \in X$, 成立

$$d(\phi(x), \phi(y)) \leqslant \alpha d(x, y),$$

就称 ϕ 是 X 上的压缩映射, 对于线性空间 X 上的情况往往称之为压缩算子.

经压缩映射后, 集合中任意两点的距离被缩短了, 至多等于原像距离的 $\alpha(\alpha < 1)$ 倍.

压缩映射是连续的, 即对任何收敛点列 $x_n \to x_0$, 有 $\phi(x_n) \to \phi(x_0)$. 事实上, 由压缩映射定义有

$$d(\phi(x_n), \phi(x_0)) \leqslant \alpha d(x_n, x_0).$$

当 $n \to \infty$ 时, 由 $d(x_n, x_0) \to 0$ 就得到 $d(\phi(x_n), \phi(x_0)) \to 0$.

对于 X 上的映射 ϕ, ϕ^2 表示 $x \mapsto \phi(\phi(x))$, 由此可以逐次定义映射 ϕ^n.

定理 1.5.1 (Banach) 完备度量空间 X 到自身的压缩映射 ϕ 有唯一不动点.

证明 存在性. 在 X 中任取一点 x_0, 从 x_0 开始, 作一迭代程序: 令

$$x_1 = \phi(x_0), x_2 = \phi(x_1) = \phi^2(x_0), \cdots, x_n = \phi(x_{n-1}) = \cdots = \phi^n(x_0), \cdots.$$

这样得到 X 中的一个点列 $\{x_n\}$, 只要证明 $\{x_n\}$ 是基本点列, 那么它在完备空间 X 中存在极限 $x^* : x_n \to x^*$. 由压缩映射的连续性, 又有 $\phi(x_n) \to \phi(x^*)$. 另一方面, $\phi(x_n) = x_{n+1} \to x^*$, 又因为收敛点列的极限是唯一的, 得到 $\phi(x^*) = x^*$, 即 x^* 是 ϕ 的不动点.

现在证明 $\{x_n\}$ 是基本点列. 由于 ϕ 是压缩映射, 我们有

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(\phi(x_n), \phi(x_{n-1})) \leqslant \alpha d(x_n, x_{n-1}), n = 1, 2, \cdots.$$

反复应用此式, 由数学归纳法得到

$$d(x_{n+1}, x_n) \leqslant \alpha^n d(x_1, x_0), \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{1.23}$$

于是, 对于任意正整数 p, 由三角不等式及式 (1.23) 式得到

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leqslant d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leqslant (\alpha^{n+p-1} + \alpha^{n+p-2} + \cdots + \alpha^n) d(x_1, x_0) \\ &= \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \\ &< \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0). \end{aligned} \tag{1.24}$$

由于 $0 \leqslant \alpha < 1$, 所以 $\{x_n\}$ 是 X 中的基本点列.

唯一性. 设 x' 也是 ϕ 的不动点, $\phi(x') = x'$. 于是

$$d(x^*, x') = d(\phi(x^*), \phi(x')) \leqslant \alpha d(x^*, x').$$

因为 $0 \leqslant \alpha < 1$, 所以 $d(x^*, x') = 0$, 即 $x^* = x'$. □

注 1.5.1 不动点定理的证明不仅给出了压缩映射的不动点的存在性和唯一性, 同时也提供了求不动点的一种方法——迭代法. 就是说, 在完备度量空间中, 从任取的“初值” x_0 出发, 逐次作点列 $x_n = \phi^n(x_0)$, $n = 1, 2, \cdots$, 它收敛到方程 $\phi(x) = x$ 的解. 这种方法也称为逐次逼近法. 在 (1.24) 式中令 $p \to \infty$, 得到

$$d(x^*, x_n) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0). \tag{1.25}$$

上式告诉我们“近似解” x_n 与所求准确解 x^* 的逼近程度, 以及方程 $\phi(x) = x$ 的解可能坐落的范围. 例如当 $n = 0$ 时, 由 (1.25) 式得到

$$d(x^*, x_0) \leqslant \frac{1}{1-\alpha} d(x_1, x_0).$$

注 1.5.2 应该注意, 上述定理 1.5.1 中, 空间 X 的完备性条件不能除去. 例如考察 $\mathbb{R}$ 的子空间 $(0, \infty)$ 到它自身的映射

$$\phi(x) = \alpha x,$$

其中 α 是小于 1 的正数. ϕ 显然是压缩映射, 但是它在 $(0, \infty)$ 中没有不动点.

注 1.5.3 条件 $0 \leqslant \alpha < 1$ 不能减弱为 $\alpha = 1$. 例如在 $\mathbb{R}$ 的闭子空间 $[0, \infty)$ 中

$$\phi(x) = x + \frac{1}{1+x},$$

容易验证这个映射 ϕ 满足

$$d(\phi(x), \phi(y)) < d(x, y), \quad 对于\ x \neq y. \tag{1.26}$$

但 ϕ 在 $[0, \infty)$ 中没有不动点.

压缩映射原理有许多有用的推广, 下面介绍较常见的一种推广形式.

定理 1.5.2 设度量空间 X 是完备的, ϕ 是 X 到自身的映射. 如果存在一个自然数 n 使得 ϕ^n 是 X 上的压缩映射, 那么映射 ϕ 在 X 中有唯一的不动点.

证明 令 $\psi = \phi^n$, 则 ψ 是 X 上的压缩映射. 由定理 1.5.1, ψ 有不动点 $x^* : \psi(x^*) = x^*$. 我们证明 x^* 也是 ϕ 的不动点.

事实上, 由于

$$\psi\phi = \phi^{n+1} = \phi\psi,$$

所以 $\psi(\phi(x^*)) = \phi(\psi(x^*)) = \phi(x^*)$, $\phi(x^*)$ 也是 ψ 的不动点. 由于压缩映射 ψ 只有一个不动点, 所以 $\phi(x^*) = x^*$.

设 y^* 是 ϕ 的另一不动点, 由于 $\phi(y^*)=y^*$, 则

$$\phi^n(y^*)=\phi^{n-1}(y^*)=\cdots=y^*.$$

因此, y^* 也是 ψ 的不动点. 又由于 ψ 的不动点只有一个, 所以 $y^*=x^*$, 即 ϕ 的不动点也只有一个. □

应用

下面是压缩映射原理在研究隐函数存在性方面的应用.

例 1.5.1 (隐函数存在定理) 设函数 $f(x,y)$ 在条形闭区域

$$\{(x,y): a\leqslant x\leqslant b,\quad -\infty<y<\infty\}$$

上处处连续, 关于 y 的偏导数 $f'_y(x,y)$, 有常数 $m<M$ 使得在上述条形区域中

$$0<m\leqslant f'_y(x,y)\leqslant M.$$

那么方程 $f(x,y)=0$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有唯一的连续解 $y=\varphi(x)$.

证明 在完备空间 $C[a,b]$ 上作映射

$$(A\varphi)(x)=\varphi(x)-\frac{1}{M}f(x,\varphi(x)),$$

这是 $C[a,b]$ 到自身的压缩映射. 事实上, 对于 $\varphi_1,\varphi_2\in C[a,b]$, $x\in[a,b]$, 由微分中值定理, 存在 $0<\theta<1$, 使得

$$\begin{aligned}
|(A\varphi_2-A\varphi_1)(x)|&=\left|\varphi_2(x)-\frac{1}{M}f(x,\varphi_2(x))-\varphi_1(x)+\frac{1}{M}f(x,\varphi_1(x))\right|\\
&=\left|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)-\frac{1}{M}f'_y(x,\varphi_1(x)+\theta(\varphi_2(x)-\varphi_1(x)))(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))\right|\\
&=|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|\left|1-\frac{1}{M}f'_y(x,\varphi_1(x)+\theta(\varphi_2(x)-\varphi_1(x)))\right|\\
&\leqslant|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|\left(1-\frac{m}{M}\right).
\end{aligned}\tag{1.27}$$

由于 $0<\dfrac{m}{M}<1$, 所以 $0<1-\dfrac{m}{M}<1$, 令 $\alpha=1-\dfrac{m}{M}$, 便有

$$|(A\varphi_2-A\varphi_1)(x)|\leqslant\alpha|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|.$$

所以

$$\|A\varphi_2-A\varphi_1\|\leqslant\alpha\|\varphi_2-\varphi_1\|.$$

这说明 A 是 $C[a,b]$ 上的压缩算子. 由定理 1.5.1, 有唯一 $\varphi\in C[a,b]$ 使得 $A\varphi=\varphi$, 这就是说

$$f(x,\varphi(x)) \equiv 0, \quad a \leqslant x \leqslant b. \qquad \square$$

现在应用不动点原理证明两类微分方程和积分方程解的存在性和唯一性定理.

定理 1.5.3 假设 $f(x,y)$ 是平面上某单连通区域 $\mathcal{D}$ 上的二元连续函数, 我们考虑一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \\ y|_{x=x_0} = y_0. \end{cases} \tag{1.28}$$

假设 $f(x,y)$ 在 $\mathcal{D}$ 的一个矩形子集 $D = \{(x,y) : |x-x_0| \leqslant a, |y-y_0| \leqslant \lambda\}$ 上对 y 满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $L>0$, 使得当 $(x,y_i) \in D(i=1,2)$ 时,

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant L\,|y_1 - y_2|\,. \tag{1.29}$$

记 $M = \max\limits_{(x,y)\in D} |f(x,y)|$, 则当 $h < \min\left\{a, \dfrac{\lambda}{M}, \dfrac{1}{L}\right\}$ 时, 初值问题 (1.28) 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上有唯一解.

证明 初值问题 (1.28) 等价于求解积分方程

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\mathrm{d}t. \tag{1.30}$$

记 C_D 是连续函数空间 $C[x_0-h, x_0+h]$ 中满足 $(x,\varphi(x)) \in D$ 且 $\varphi(x_0) = y_0$ 的函数全体, 那么 C_D 是 $C[x_0-h,x_0+h]$ 的 (度量) 子空间, 且是闭子空间, 因而也是完备的. 作映射

$$A : \varphi \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\mathrm{d}t. \tag{1.31}$$

下面验证, 当 $h < \min\left\{a, \dfrac{\lambda}{M}, \dfrac{1}{L}\right\}$ 时, 由 (1.31) 式所确定的映射 A 具有下述性质:

(i) 当 $\varphi \in C_D$ 时, $\psi = A\varphi \in C_D$;

(ii) 当 $\varphi_1, \varphi_2 \in C_D$ 时, $d(A\varphi_1, A\varphi_2) \leqslant \alpha d(\varphi_1,\varphi_2)$, 其中 $\alpha = Lh < 1$.

即 A 是 C_D 上的压缩映射, 所以它有唯一的不动点, 因而初值问题 (1.28) 有唯一的解.

事实上, 显然 $\psi(x_0) = y_0$. 当 $|x - x_0| \leqslant h$ 时, $\psi(x)$ 为连续函数, 且

$$|\psi(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\mathrm{d}t\right| \leqslant Mh < \lambda,$$

所以 $\psi \in C_D$.

当 $\varphi_1, \varphi_2 \in C_D$ 时,

$$\begin{aligned} d(A\varphi_1, A\varphi_2) &= \max_{|x-x_0|\leqslant h} \left|\int_{x_0}^{x} [f(t,\varphi_1(t)) - f(t,\varphi_2(t))]\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant L \max_{|x-x_0|\leqslant h} \int_{x_0}^{x} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\leqslant Lhd(\varphi_1, \varphi_2). \quad \square$$

定理 1.5.4 设 $f(s)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数, $K(s,t)$ 为正方形 $[a,b]\times[a,b]$ 上的连续函数, 令

$$M = \sup_{a\leqslant s\leqslant b} \int_a^b |K(s,t)| \mathrm{d}t < \infty,$$

则当 $|\lambda| < \dfrac{1}{M}$ 时, 有唯一的 $\varphi \in C[a,b]$ 适合方程

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t. \tag{1.32}$$

证明 在连续函数空间 $C[a,b]$ 上定义映射

$$(K\varphi)(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

记 $\alpha = M|\lambda|$, 那么 $\alpha < 1$. 对于任意的 $\varphi, \psi \in C[a,b]$, 有

$$\begin{aligned}\|K\varphi - K\psi\| &= |\lambda| \left\| \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t - \int_a^b K(s,t)\psi(t)\mathrm{d}t \right\| \\ &\leqslant |\lambda| \max_{a\leqslant s\leqslant b} \int_a^b |K(s,t)||\varphi(t) - \psi(t)|\mathrm{d}t \\ &\leqslant |\lambda| M \max_{a\leqslant t\leqslant b} |\varphi(t) - \psi(t)| \\ &= \alpha\|\varphi - \psi\|.\end{aligned}$$

应用 Banach 不动点定理, 得到积分方程 (1.32) 有唯一的连续解 $\varphi(t)$. $\square$

作为定理 1.5.4 的一个应用, 我们考察积分方程

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y,$$

这里 λ 是常数. 这种类型的方程称为 Volterra (沃尔泰拉) 型积分方程. 某些数学物理问题和某些变分问题均可以归结为解这种积分方程.

我们来证明下面的定理.

定理 1.5.5 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数, $K(x,y)$ 是三角形 $D = \{(x,y): a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant y\leqslant x\}$ 上的连续函数, 那么对于任何常数 λ, 方程

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y \tag{1.33}$$

在 $[a,b]$ 上有唯一的连续函数解 $\varphi(x)$.

证明 记 $M = \sup\{|K(x,y)| : (x,y) \in D\}$. 考察 $C[a,b]$ 到自身的映射

$$(B\varphi)(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y.$$

对于 $C[a,b]$ 中任意两个函数 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$, 当 $x\in[a,b]$ 时,

$$\begin{aligned}|(B\varphi_1)(x)-(B\varphi_2)(x)|&=\left|\lambda\int_a^x K(x,y)(\varphi_1(y)-\varphi_2(y))\mathrm{d}y\right|\\&\leqslant|\lambda|M(x-a)\|\varphi_1-\varphi_2\|.\end{aligned}$$

今用数学归纳法证明: 当 $x\in[a,b]$ 时,

$$|(B^n\varphi_1)(x)-(B^n\varphi_2)(x)|\leqslant|\lambda|^n M^n\frac{(x-a)^n}{n!}\|\varphi_1-\varphi_2\|. \tag{1.34}$$

当 $n=1$ 时, 已证. 设不等式 (1.34) 对于 $n(n\geqslant 1)$ 成立, 我们证明不等式 (1.34) 对于 $n+1$ 也成立. 事实上,

$$\begin{aligned}|(B^{n+1}\varphi_1)(x)-(B^{n+1}\varphi_2)(x)|&=\left|\lambda\int_a^x K(x,y)[(B^n\varphi_1)(y)-(B^n\varphi_2)(y)]\mathrm{d}y\right|\\&\leqslant\frac{|\lambda|^n M^{n+1}}{n!}|\lambda|\int_a^x(y-a)^n\mathrm{d}y\|\varphi_1-\varphi_2\|\\&=\frac{|\lambda|^{n+1}M^{n+1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\|\varphi_1-\varphi_2\|.\end{aligned}$$

于是不等式 (1.34) 成立. 取正整数 n, 使得

$$\alpha\xlongequal{\text{def}}|\lambda|^n M^n(b-a)^n/n!<1.$$

那么

$$\|B^n\varphi_1-B^n\varphi_2\|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|(B^n\varphi_1)(x)-(B^n\varphi_2)(x)|\leqslant\alpha\|\varphi_1-\varphi_2\|.$$

利用定理 1.5.4 就知道, 方程 (1.33) 在 $C[a,b]$ 中有唯一的解. □

习题 1.5

1. 若 T 是度量空间上的压缩映射, 证明: 对任意正整数 n, T^n 也是压缩映射. 并说明逆命题不一定成立.
2. 设 X 为完备度量空间, φ 是 X 到自身的映射, 记

$$\alpha_n=\sup_{x\neq y}\frac{d(\varphi^n(x),\varphi^n(y))}{d(x,y)}.$$

   (i) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n<\infty$, 则对任何一个初值 x_0, 迭代程序 $\{\varphi^n(x_0)\}$ 收敛于映射 φ 的唯一不动点, 并求出第 n 次近似解与准确解 $\varphi(x)=x$ 的逼近程度.

   (ii) 若 $\inf_n\alpha_n<1$, 则 φ 有唯一的不动点. 并给出一种收敛于准确解 $\varphi(x)=x$ 的迭代程序以及 n 次近似解与准确解的逼近程度.

3. 设 $\alpha_{jk}(j,k=1,2,\cdots,n)$ 为一组实数, 适合条件

$$\sum_{j,k=1}^{n}(\alpha_{jk}-\delta_{jk})^2<1,$$

其中 δ_{jk} 是 Kronecker (克罗内克) 符号. 那么代数方程

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

对任何一组固定的 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 有唯一的解 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 给出迭代程序以及 n 次近似解与准确解的逼近程度.

4. 写出并利用不动点原理证明, 关于方程组

$$\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x}=f_k(x,y_1,y_2,\cdots,y_n),\quad k=1,2,\cdots,n$$

的解的存在性与唯一性定理.

5. 设从完备度量空间 X 到自身的映射 T 满足如下条件: 在开球 $O(x_0,r)(r>0)$ 内成立

$$d(Tx,Tx')<\theta d(x,x'),\quad 0<\theta<1,\ x\neq x',$$

并且

$$d(x_0,Tx_0)\leqslant \alpha r.$$

那么,

(ii) 当 α 满足怎样的条件时, T 在 $O(x_0,r)$ 内有不动点, 并且唯一?

(ii) 当 $\alpha\leqslant 1-\theta$ 时, 若 T 在闭球 $B(x_0,r)$ 上连续, 则 T 在 $B(x_0,r)$ 内有不动点. 这时唯一性是否成立? 证明你的结论.

6. 设 F 是 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, φ 是 F 到自身的映射并且满足如下条件: 对于任何 $x,y\in F\,(x\neq y)$, 有

$$d(\varphi(x),\varphi(y))<d(x,y),\quad x\neq y.$$

证明: 映射 φ 在 F 中存在唯一的不动点. 对于不闭的有界集这个事实能否成立?

7. **(Newton 迭代法)** 设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的二次连续可微实函数, $[a,b]$ 中点 x 满足 $f(x)=0,f'(x)\neq 0$. 证明: 存在点 x 的一个邻域 U, 使得对任意 $x_0\in U$, 迭代序列

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},n=0,1,2,\cdots$$

都收敛于 x.

8. **(隐函数存在定理)** 设函数 $F\colon U\times V\mapsto\mathbb{R}^m$, 其中 U 和 V 分别是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 中的开区域, $(x_0,y_0)\in U\times V$. 如果 F 在 $U\times V$ 中连续, 并且对于任意的 $x\in U$, $F(x,\cdot)$ 在 V 中是连续

可微的, 同时满足

$$F(x_0,y_0)=0,\quad \det\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(x_0,y_0)\neq 0.$$

其中 $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ 是 F 关于 y 的 Jacobi (雅可比) 矩阵. 对于 $r>0$, 令 $C(B(x_0,r),\mathbb{R}^m)$ 表示定义在闭球 $B(x_0,r)$ 上取值在 $\mathbb{R}^m$ 中的向量值连续函数空间, 它按范数

$$\|\phi\|=\max_{x\in B(x_0,r),i=1,2,\cdots,m}|\phi_i(x)|,\quad \forall\phi=(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_m)\in C(B(x_0,r),\mathbb{R}^m)$$

构成了一个 Banach 空间. 证明

(i) 存在 $r,\delta>0$, 使得在 $C(B(x_0,r),\mathbb{R}^m)$ 的子集

$$E\overset{\text{def}}{=\!=}\{\phi\in C(B(x_0,r),\mathbb{R}^m):\phi(x_0)=y_0,|\phi(x)-y_0|\leqslant\delta,\forall x\in B(x_0,r)\}$$

中, $(T\phi)(x)\overset{\text{def}}{=\!=}\phi(x)-\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^{-1}F(x,\phi(x))$ 是良定义的压缩映射.

(ii) 存在 x_0 的邻域 $U_0\subset U$ 以及唯一的连续函数 $\varphi\colon U_0\mapsto\mathbb{R}^m$, 满足

$$\begin{cases}F(x,\varphi(x))\equiv 0,\quad \forall x\in U_0,\\ \varphi(x_0)=y_0.\end{cases}$$

9. 设 $Iso(\mathbb{R}^n)=\{f:f$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上等距的双射$\}$ 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 的自同构群, 一个群 G 在 $\mathbb{R}^n$ 的作用即为一个群同态 $\phi:G\to Iso(\mathbb{R}^n)$. 我们首先来看 Kakutani (角谷静夫) 不动点定理的一个特殊情况.

(i) 设 G 是一个有限群,G 在 $\mathbb{R}^n$ 的作用由同态 $\phi:G\to Iso(\mathbb{R}^n)$ 给出. 取一点 $v\in\mathbb{R}^n$. 证明: 函数 $f(x)=\sum\limits_{g\in G}d(x,\phi(g)v)$ 存在可达的最小值.

(ii) 设 G 是一个有限群,G 在 $\mathbb{R}^n$ 的作用由同态 $\phi:G\to Iso(\mathbb{R}^n)$ 给出. 证明: 存在点 $v\in\mathbb{R}^n$, 使得对任意 $g\in G$ 有 $\phi(g)v=v$.

称群 G 在 $\mathbb{R}^n$ 的作用 $\phi:G\to Iso(\mathbb{R}^n)$ 是自由的, 是指对于 $g\in G$, 若存在 $v\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\phi(g)v=v$, 则 g 是 G 的单位元 e. 称群 G 是无挠的, 是指若 $g\in G$ 及存在正整数 m 使得 $g^m=e$, 则 $g=e$.

(iii) 证明: 若群 G 存在一个在 $\mathbb{R}^n$ 上的自由等距群作用, 则 G 是无挠的.

在几何群论中, 经常使用群 G 在一些几何对象如 G 的 Cayley 图及相应的 Hilbert 空间上的作用, 刻画群 G 的代数性质. 更多内容可参阅 Clay (克莱) 与 Margalit (马加利特) 的几何群论著作 [11].

10. 设 $G=\mathbb{Z}_2*\mathbb{Z}_3$ 为 $\mathbb{Z}_2$ 与 $\mathbb{Z}_3$ 的自由积. 容易验证, 群 G 可如此显式表达: 取生成集 $S=\{a,b\}$,G 中元素 u 可唯一写成有限长度的单词:

$$ab^{\varepsilon_1}ab^{\varepsilon_2}\cdots\ \text{或}\ b^{\varepsilon_1}ab^{\varepsilon_2}a\cdots,\varepsilon_i=\pm1,$$

单词长度正好为 Cayley 图上度量 $d_S(e,u)$ (定义见习题 1.1 第 6, 10 题). 对于 $u,v\in G$, 它们的乘积为单词 uv, 并对相邻 b 与 b、b^{-1} 与 b^{-1} 分别用 b^{-1},b 代替, 且消除相邻的 a 与 a、b 与 b^{-1}. 设 H 是 G 中的一个有限子群.

(i) 画出 Cayley 图 $\Gamma=(G,E)$ 中涉及顶点 $B(e,3)=\{u\in G:d_S(e,u)\leqslant 3\}$ 的部分.

(ii) 对于 $u\in G$, $d_S(e,u)\geqslant 2$, 设 $v=a,b$ 或 b^{-1} 为连接 e,u 最短路径中的第一个顶点. 对顶点 $P\in G$ 及正整数 r, 若 $d(e,P)\leqslant r,d(u,P)\leqslant r$, 证明: $d(v,P)\leqslant r-1$.

(iii) 令

$$r_0=\min\{r\in\mathbb{N}_+:\exists b\in G,H\subset B(b,r)\}.$$

令 B 为达到最小值的 G 中元素全体: $b\in B$ 当且仅当 $H\subset B(b,r_0)$. 证明: B 是 H 的一个 (左作用) 不变集, 即 $gB=B,\forall g\in H$.

(iv) 令 $d_B=\max\{d_S(b_1,b_2):b_1,b_2\in B\}$ 为集合 B 的直径. 证明: 存在元素 $b\in G$, 使得其共轭子群 $b^{-1}Hb\subset B(e,d_B)$.

(v) 列举 d_B 可能的取值, 由此证明: 有限子群 H 必为 $\{e\}$, $\{e,a\}$ 或者 $\{e,b,b^{-1}\}$ 的共轭子群.

实际上, 由几何群论可得, 双曲群 (Hyperbolic Group) 均有类似的结果.

1.6　列紧性

在实数理论中, 有两个非常基本的定理, 一个是 Bolzano-Weierstrass (波尔查诺–魏尔斯特拉斯) 定理: 任一有界点列都有收敛子列. 另一个是 Heine-Borel (海涅–博雷尔) 定理: 有界闭集的任何开覆盖都有有限的子覆盖. 数学分析中一些关键定理 (例如 $C[a,b]$ 上连续函数可取到最大值, 最小值以及最大值和最小值之间的一切值) 的证明都要用到它们.

在这一节中, 我们讨论一般度量空间中的紧性.

1.6.1　相对列紧集

定义 1.6.1　设 X 是度量空间, A 是 X 的子集. 如果 A 中的任何点列都有在 X 中收敛的子列, 就称 A 是 (X 中的) 相对列紧集. 如果 X 自身是相对列紧集, 就称 X 是列紧空间.

定义 1.6.2　度量空间中闭的相对列紧集, 即 A 中任一点列有收敛子点列收敛到 A 中的一点, 称为列紧集.

容易看出相对列紧集有下面的几点性质:

(1) 有限点集是相对列紧集.

(2) 有限个相对列紧集的并集是相对列紧集.

(3) 相对列紧集的子集是相对列紧集, 因此, 任意一族相对列紧集的交集是相对列紧集.

(4) 相对列紧集的闭包是相对列紧集, 从而是列紧集.

事实上, 设 A 是相对列紧集. 任取点列 $\{x_n\} \subset \bar{A}$, 那么对每个 n, 可以取到点 $y_n \in A$ 使得 $d(x_n, y_n) < \dfrac{1}{n}$. 因为 A 是相对列紧的, 故存在点 $y \in X$ 以及子列 $\{y_{n_k}\}$, 使得 $y_{n_k} \to y(k \to \infty)$, 所以 $x_{n_k} \to y$. 因此 $\bar{A}$ 是相对列紧的.

(5) 相对列紧集中的基本点列都收敛. 因此, 列紧的度量空间是完备的

事实上, 如果 $\{x_n\}$ 是相对列紧集 A 中的基本点列, 那么有子点列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于度量空间 X 中的一点 x_0. 根据引理 1.4.1, 有 $x_n \to x_0$.

例 1.6.1 由 Bolzano-Weierstrass 定理, $\mathbb{R}^n$ (或 $\mathbb{C}^n$) 中的子集 A 是相对列紧集等价于 A 是有界的. 再由定理 1.4.2 的讨论知, 对任意的有限维赋范线性空间 X, 它的子集 A 是相对列紧集等价于 A 是有界集.

然而, 对于无穷维的赋范线性空间, 情况就变得非常复杂了.

例 1.6.2 空间 l^2 中的一列向量 $\{e_n \colon e_n = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)\}$ 构成的子集 X, 其中的任何两个不同的元素之间的距离都等于 $\sqrt{2}$, 这是 l^2 中的有界点列. 但是, 点列 $\{e_n\}$ 没有收敛的子点列. 另外, 开集族 $\left\{O\left(e_n, \dfrac{1}{2}\right) : n = 1, 2, \cdots\right\}$ 显然覆盖 X, 但是每个开集 $O\left(e_n, \dfrac{1}{2}\right)$ 都只包含一个元素 e_n, 因此它没有包含 X 的任何有限子覆盖.

实际上, 对于一般的赋范线性空间, F. Riesz (里斯) 证明了下面的结果.

引理 1.6.1 (F. Riesz) *设 A 是赋范线性空间 X 的闭线性子空间, 并且 $A \neq X$. 那么对于任一 $\varepsilon(0 < \varepsilon < 1)$, 存在 X 中的单位向量 x_0, $\|x_0\| = 1$, 使得*

$$d(x_0, A) > \varepsilon.$$

证明 由于 A 是 X 的真子空间, 任取一点 $\bar{x} \in X \setminus A$. 因为 A 是闭的, 所以, $d(\bar{x}, A) = d > 0$. 因为 $\dfrac{d}{\varepsilon} > d$, 存在 A 中的点 x' 满足

$$\|\bar{x} - x'\| < \frac{d}{\varepsilon}.$$

作 $x_0 = \dfrac{\bar{x} - x'}{\|\bar{x} - x'\|}$, 那么 $\|x_0\| = 1$. 并且, 对任何 $x \in A$, 因 $x' + \|\bar{x} - x'\| x \in A$, 得到

$$\|\bar{x} - (x' + \|\bar{x} - x'\| x)\| \geqslant d.$$

因此,

$$\begin{aligned}
\|x_0 - x\| &= \left\| \frac{\bar{x} - x'}{\|\bar{x} - x'\|} - x \right\| \\
&= \frac{1}{\|\bar{x} - x'\|} \|\bar{x} - (x' + \|\bar{x} - x'\| x)\| \\
&\geqslant \frac{d}{\|\bar{x} - x'\|}.
\end{aligned}$$

于是 $d(x_0, A) \geqslant \dfrac{d}{\|\bar{x}-x'\|} > \varepsilon$. □

下面的定理指出了有限维空间和无限维空间的一个本质区别.

定理 1.6.1 如果赋范线性空间 X 是无限维的, 那么 X 的单位球不是相对列紧的.

证明 在 X 中任取一个单位向量 x_1, $\|x_1\|=1$. 令 $X_1=\{x : x=\alpha x_1, \alpha \text{ 是数}\}$ 表示由 x_1 张成的一维子空间, 于是 $X_1 \neq X$. 由定理 1.4.2 及引理 1.2.1 知道 X_1 是 X 的闭子空间. 由 F. Riesz 引理, 存在 $x_2 \in X, \|x_2\|=1$, 使得 $d(x_2, X_1) > \dfrac{1}{2}$. 用 X_2 表示由 x_1, x_2 张成的二维子空间, 同样地, X_2 是 X 的闭子空间, 并且 $X_2 \neq X$. 于是又可以对 X_2 应用 F. Riesz 引理.

这样继续做下去, 从 X 中选取了一列单位向量 $\{x_n : n=1,2,\cdots\}$, 以及一列闭子空间 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}, X_n=\operatorname{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 而且

$$d(x_{n+1}, X_n) > \frac{1}{2}, \quad n=1,2,\cdots.$$

因而当 $m>n$ 时, 由于 $x_n \in X_{m-1}$,

$$\|x_m - x_n\| \geqslant d(x_m, X_{m-1}) > \frac{1}{2},$$

这种点列 $\{x_n\}$ 不可能含有收敛的子序列. 所以有界集 $\{x : \|x\| \leqslant 1\}$ 不是相对列紧集. □

下面引入拓扑学中对列紧集的刻画. 完整证明可见附录.

定理 1.6.2 设 A 是度量空间 X 中的点集. A 是列紧集的充要条件是 X 中每个覆盖 A 的开集族中都有有限个开集覆盖 A.

这就是说, 在度量空间中 (覆盖) 紧集和列紧集是等价的. 因此, 在度量空间中, 不需再区分列紧集和 (覆盖) 紧集. 下面我们再给出紧集的一个有效判别方法.

定义 1.6.3 设 A 是度量空间 X 中点集, B 是 A 的子集.

(i) 如果有正数 ε, 使得以 B 中各点为球心, 以 ε 为半径的开球全体覆盖 A, 即

$$\bigcup_{x\in B} O(x,\varepsilon) \supset A,$$

那么称 B 是 A 的 ε 网.

(ii) 如果对任何 $\varepsilon>0$, 集 A 总有有限的 ε 网 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset A$ (点的个数 n 随 ε 而变), 那么称 A 是完全有界的集.

注 1.6.1 在完全有界集定义中的 B 要求是 A 的子集, 但实际上无须这个条件. 这一事实留作读者练习.

例 1.6.3 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集是完全有界的. 从而, 我们也可得到有限维赋范线性空间中的有界集是完全有界的.

完全有界集和相对列紧集有下面的关系.

定理 1.6.3 (Hausdorff (豪斯多夫)) (i) 度量空间中相对列紧集是完全有界集.

(ii) 在完备度量空间中, 完全有界集是相对列紧集. 因此, 在完备度量空间中, 完全有界集和相对列紧集是相同的.

定理 1.6.3 中的 (ii) 的完备性条件是不能除去的. 例如, 在赋范线性空间 $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ 中, 考虑其中的有界点列 $\{f_n\}$,

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{2}, \\ 1 - n\left(t - \dfrac{1}{2}\right), & \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} < t \leqslant 1, \end{cases}$$

则 $\|f_n - f_m\|_1 \leqslant \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}$, 所以 $\{f_n\}$ 是 $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ 中的基本点列, 集合 $A = \{f_n\}$ 是完全有界集, 但是它没有收敛子列, 因此不是相对列紧的. 不但如此, 而且更进一步有

定理 1.6.4 如果度量空间 X 中每个完全有界集都是相对列紧集, 那么 X 是完备的.

证明 设 $\{x_n\}$ 是 X 中基本点列, 则集合 $\{x_n\}$ 是完全有界的. 由假设得到集合 $\{x_n\}$ 是相对列紧集. 从而序列 $\{x_n\}$ 存在收敛子列, 因此 $\{x_n\}$ 也是收敛的. □

由此我们也得到下述推论.

推论 1.6.1 相对列紧集是可分的有界集.

证明 相对列紧集是完全有界集, 从而它是有界的. 只需说明完全有界集是可分的.

设 A 是完全有界集, 令 $\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_{k_n}^{(n)}\}$ 是 A 的有限的 $\dfrac{1}{n}$ 网 $(n = 1, 2, \cdots)$, 那么集

$$B = \{x_i^{(n)} : i = 1, 2, \cdots, k_n; n = 1, 2, \cdots\}$$

是可数集. 容易证明 B 在 A 中稠密, 故 A 是可分的. □

1.6.2 Arzelà-Ascoli 定理

从定理 1.6.3 知道, 在完备的度量空间中, 相对列紧性与完全有界性是一致的. 下面我们对某些具体的完备空间给出点集是完全有界集的判定准则. 我们总是设法把问题引导到有限维 Euclid 空间, 因为在有限维空间中完全有界和有界性是一致的, 而有界的条件较易掌握. 我们只以 $C[a,b]$ 及 l^p 为例来说明处理这类问题的基本方法, 其余的空间如 $L^p[a,b]$, $L^p(\mathbb{R})$, c 空间中点集是列紧集的条件都可以类似地给出.

定义 1.6.4 设 A 是 $[a,b]$ 上的一族连续函数, $A \subset C[a,b]$. 若对任何一个正数 ε, 有 $\delta > 0$, 使得对于区间 $[a,b]$ 中任何两点 $x, x' \in [a,b]$, 当 $|x - x'| < \delta$ 时, 对 A 中每个函数

f, 都成立

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$$

(即 δ 不依赖于 A 中个别的 f), 那么称 A 是等度连续的函数族.

"等度" 的意思是族 A 中各个函数的连续程度是同等的.

例 1.6.4 设 L 和 α 是两个正数, A 是 $C[a,b]$ 中满足 Hölder 连续性条件:

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|^{\alpha},\quad x,y\in[a,b]$$

的函数 f 所成的函数族, A 是等度连续的函数族.

例 1.6.5 设 $K(s,t)$ 是 $[a,b]\times[a,b]$ 上的连续函数, 设 $C[a,b]$ 的子集

$$A=\left\{\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t\colon \varphi\in C[a,b],\|\varphi\|\leqslant 1\right\},$$

则 A 是等度连续的. 事实上, 因为 $K(s,t)$ 是正方形 $[a,b]\times[a,b]$ 上的连续函数, 它是一致连续的, 所以对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得: 当 $|s_1-s_2|<\delta$ 时,

$$|K(s_1,t)-K(s_2,t)|<\varepsilon.$$

于是, 对于任意的 $\varphi\in C[a,b],\|\varphi\|\leqslant 1$, 都有

$$\left|\int_a^b K(s_1,t)\varphi(t)\mathrm{d}t-\int_a^b K(s_2,t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b|K(s_1,t)-K(s_2,t)|\,|\varphi(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant(b-a)\varepsilon.$$

前已指出, 度量空间 $C[a,b]$ 中点集的有界性不足以推出相对列紧性. 但是, 只要再加上等度连续性的条件就行了.

定理 1.6.5 (Arzelà-Ascoli (阿尔泽拉–阿斯科利)) *$C[a,b]$ 的子集 A 为相对列紧集的充要条件是 A 为有界的、等度连续的函数族.*

证明 充分性. 设 A 是 $C[a,b]$ 中的有界点集同时又是等度连续的, 因为 $C[a,b]$ 是完备空间, 由定理 1.6.3, 只需证明 A 是完全有界的. 对任意给定的正数 ε, 由 A 的等度连续性, 有正数 δ, 使得对 $[a,b]$ 中的点 x,x', 当 $|x-x'|<\delta$ 时, A 中每个 f 都满足

$$|f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{3}.\tag{1.35}$$

利用这个 δ, 任意取定 $[a,b]$ 中的有限个分点:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

使得 $|x_i-x_{i-1}|<\delta(i=1,2,\cdots,n)$. 因为 A 是有界集, 有常数 $K>0$ 使得对每个 $f\in A$, $\|f\|=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|\leqslant K$. 因此, 点集

$$\tilde{A}=\{(f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_n))\colon f\in A\}$$

组成 $n+1$ 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的有界集, 即 $\sqrt{\sum_{i=0}^{n}|f(x_i)|^2} \leqslant K\sqrt{n+1}$. 由例 1.6.3, $\tilde{A}$ 是完全有界的, 所以有 $f_1, f_2, \cdots, f_k \in A$, 使得 k 个点

$$(f_i(x_0), f_i(x_1), \cdots, f_i(x_n)), \quad i=1,2,\cdots,k$$

组成 $\tilde{A}$ 中的 $\dfrac{\varepsilon}{3}$ 网. 现在来证明 $\{f_1, f_2, \cdots, f_k\}$ 是 A 的 ε 网就行了. 事实上, 任取 $f \in A$, 由 $(f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)) \in \tilde{A}$, 所以有 $i_0 \in \{1,2,\cdots,k\}$ 使得

$$\sqrt{\sum_{i=0}^{n}|f_{i_0}(x_i)-f(x_i)|^2} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

所以 $|f(x_i)-f_{i_0}(x_i)| < \dfrac{\varepsilon}{3}(i=0,1,\cdots,n)$. 对于 $[a,b]$ 中的点 x, 设 x 落在子区间 $[x_p, x_{p+1}]$ 上, 由不等式 (1.35) 得到

$$|f(x)-f_{i_0}(x)| \leqslant |f(x)-f(x_p)|+|f(x_p)-f_{i_0}(x_p)|+|f_{i_0}(x_p)-f_{i_0}(x)| < \varepsilon.$$

因此, $\|f-f_{i_0}\| < \varepsilon$, 即 $f \in O(f_{i_0}, \varepsilon)$.

必要性. 设 $A \subset C[a,b]$ 是相对列紧集, 相对列紧集是有界的. 只需证明 A 是等度连续的. 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 有 A 的有限 $\dfrac{\varepsilon}{3}$ 网 $f_1, f_2, \cdots, f_k$. 因为每个 f_i 在 $[a,b]$ 上连续, 所以有正数 $\delta_i(i=1,2,\cdots,k)$ 使得对 $[a,b]$ 上的 x, x', 当 $|x-x'| < \delta_i$ 时, $|f_i(x)-f_i(x')| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k\}$. 我们证明: 对每个 $f \in A$, 只要 $[a,b]$ 中的两点 x, x' 满足 $|x-x'| < \delta$, 便有

$$|f(x)-f(x')| < \varepsilon.$$

事实上, 对于 $f \in A$, 有 $i, 1 \leqslant i \leqslant k$, 使得 $\|f-f_i\| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, 因此

$$|f(x)-f(x')| \leqslant |f(x)-f_i(x)|+|f_i(x)-f_i(x')|+|f_i(x')-f(x')| < \varepsilon.$$

即 A 是等度连续的. □

定理 1.6.6 对 $1 \leqslant p < \infty$, 空间 l^p 中的集 A 成为相对列紧集的充要条件是 A 为有界集且对任何正数 ε, 存在正整数 N, 使得对一切 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in A$,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|x_n|^p < \varepsilon. \tag{1.36}$$

证明 因为 l^p 是完备空间, 设 A 是有界集且满足条件 (1.36), 只要证明 A 是完全有界集. 对于任何 $\eta > 0$, 取 $\varepsilon = \min\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{\eta}{2}\right)^p, 1\right\}$, 那么有 $N > 0$, 使 (1.36) 式成立. 作

$$\tilde{A} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_N) \colon x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in A\},$$

由于 A 是有界集, 有 K 使得当 $x \in A$ 时, $\|x\|_p^p = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \leqslant K^p$, 因此 $|x_i| \leqslant K$, 所以 $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N} |x_i|^2} \leqslant NK$. 因为 $\tilde{A}$ 是 N 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^N$ 中的有界集, 因而是相对列紧集. 于是有 $x^{(k)} \in A, k = 1, 2, \cdots, l$ 使得

$$\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_N^{(k)}\right), \quad k = 1, 2, \cdots, l$$

成为 $\tilde{A}$ 的 $\dfrac{\varepsilon}{N}$ 网. 现在来证明 $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(l)}\}$ 是 A 的一个 η 网. 事实上, 对任何一个 $x \in A$, 有 $k \leqslant l$ 使得 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N) \in O\left(\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_N^{(k)}\right), \dfrac{\varepsilon}{N}\right)$, 即

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left|x_i - x_i^{(k)}\right|^2} < \frac{\varepsilon}{N}.$$

因此 $\left|x_i - x_i^{(k)}\right| < \dfrac{\varepsilon}{N}$, 且

$$\begin{aligned}
\left\|x - x^{(k)}\right\|_p^p &= \sum_{i=1}^{N} \left|x_i - x_i^{(k)}\right|^p + \sum_{i=N+1}^{\infty} \left|x_i - x_i^{(k)}\right|^p \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{N} \left|x_i - x_i^{(k)}\right|^p + \sum_{i=N+1}^{\infty} 2^p \left(|x_i|^p + \left|x_i^{(k)}\right|^p\right) \\
&< N \frac{\varepsilon^p}{N^p} + 2^p \cdot 2\varepsilon \\
&= \frac{\varepsilon^{p-1}}{N^{p-1}} \varepsilon + 2^p \cdot 2\varepsilon \leqslant \eta^p,
\end{aligned}$$

所以 $x \in O(x^{(k)}, \eta)$.

反过来, 设 A 是完全有界集, 只要证明 (1.36) 式成立. 这时对任何正数 ε, 有有限的 $\dfrac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{p}}$ 网 $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(N)}\}$, 因此存在正整数 n, 使得对每个 $i = 1, 2, \cdots, N$ 成立

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left|x_k^{(i)}\right|^p < \frac{\varepsilon}{2^p},$$

其中 $x^{(i)} = \{x_k^{(i)}\}$. 由 Minkowski 不等式, 对每个 $x = \{x_k\} \in A$, 有

$$\begin{aligned}
\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} &\leqslant \left\{\sum_{k=n+1}^{\infty} \left|x_k^{(i)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=n+1}^{\infty} \left|x_k^{(i)} - x_k\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&< \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{p}} + \left\|x - x^{(i)}\right\|_p.
\end{aligned}$$

但因为 $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(N)}\}$ 是 A 的 $\dfrac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{p}}$ 网, 所以有 i 使上式右边小于 $\varepsilon^{\frac{1}{p}}$. $\square$

条件 (1.36) 对应于 $C[a,b]$ 中的等度连续性, 可以称为 “等度收敛”.

对 $L^p(\mathbb{R})$, 我们也有如下的结论, 证明可见附录.

定理 1.6.7 (Kolmogorov-Riesz-Frèchet (科尔莫哥罗夫–里斯–弗雷歇)) 空间 $L^p(\mathbb{R})$ 中的集 A 是完全有界集的充要条件是

(i) A 为有界集.

(ii) **(等度 L^p 胎紧)** 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在正数 M, 使得对于任意的 $f\in A$, 都有

$$\int_{|x|>M}|f(x)|^p\,\mathrm{d}m(x)<\varepsilon^p. \tag{1.37}$$

(iii) **(等度 L^p 范数连续)** 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对于任意的 $f\in A$, 当 $|h|<\delta$ 时, 一定有

$$\|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_p\leqslant\varepsilon. \tag{1.38}$$

1.6.3 紧度量空间

我们现在把闭区间上的连续函数的基本性质拓广到度量空间的紧集上来.

定理 1.6.8 设 K 是紧集, f 是 K 上的连续映射, 那么 K 的像 $E=f(K)$ 也是紧集.

证明 设 $\{y_n\}$ 是 E 中的一列点, 相应地有 K 中的点列 $\{x_n\}$ 使得 $y_n=f(x_n), n=1,2,\cdots$. 因为 K 是紧集, 所以 $\{x_n\}$ 含有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 并且 $x_{n_k}\to x_0\in K$. 由于 f 在 K 上连续, 所以 $y_{n_k}=f(x_{n_k})\to f(x_0)=y_0\in E$. 因此, E 是紧集. □

定理 1.6.8 的证明也常用下面的方法:

证法二 设 $\mathfrak{G}$ 是 $E=f(K)$ 的一个开覆盖, 对任何 $O\in\mathfrak{G}$, 因为 f 是连续的, 所以 $f^{-1}(O)=G$ 是开集. 显然, $\mathfrak{G}_1=\{G\colon G=f^{-1}(O), O\in\mathfrak{G}\}$ 是 K 的开覆盖, 因此存在有限个 $G_1,G_2,\cdots,G_n$, $\bigcup\limits_{i=1}^{n}G_i\supset K$, 从而 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}O_i\supset f(K)$, 其中 $O_i=f(G_i)$. 这就是说 $f(K)$ 是紧集. □

推论 1.6.2 度量空间 X 上的连续映射把相对列紧集映射成相对列紧集.

证明 设 K 是 X 的相对列紧集, 则 $\overline{K}$ 也是相对列紧的, 因此是紧集. 于是, $f(\overline{K})$ 是紧集, $f(K)\subset f(\overline{K})$ 是相对列紧的. □

推论 1.6.3 度量空间 X 的紧子集 K 上的连续函数 f 是有界的, 且上、下确界可达.

证明 由于 $f(K)$ 是实直线上的紧集, 所以 $f(K)$ 是有界的, 即有常数 K, 使得 $|f(x)|\leqslant K, \forall x\in K$. 又因为 $f(K)$ 是有界闭集, $f(K)$ 的上确界 y_1 及下确界 y_0 也在 $f(K)$ 中, 于是在 K 中有 x_0,x_1, 使得 $y_0=f(x_0), y_1=f(x_1)$. □

推论 1.6.4 紧集之间一对一的、到上的连续映射是拓扑同胚.

证明 设 f 是紧集 K 到紧集 E 上的一对一的连续映射, 要证明逆映射 f^{-1} 是连续

的. 事实上, 只要证明 f^{-1} 的逆映射 f 把 K 的任何闭子集 A 映射成闭集. 因为 K 是紧集, 所以闭子集 A 也是紧集. 因此 $f(A)$ 也是紧集. f 和 f^{-1} 一样是连续映射, 所以 f 是拓扑同胚. □

我们可以将闭区间上连续函数的一些性质推广到紧集上.

定义 1.6.5 设 X 是度量空间.

(i) 设 f 是定义在 X 上的函数. 如果对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $d(x,y)<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, 则称 f 在 X 上一致连续.

(ii) X 上连续函数的全体记为 $C(X)$, 设 $A\subset C(X)$. 如果对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $d(x,x')<\delta$ 时,

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon,\quad \forall f\in A,$$

则称集合 A 是等度连续的.

定理 1.6.9 设 X 是紧度量空间.

(i) 如果 f 是定义在 X 上的连续函数, 那么 f 在 X 上是一致连续的.

(ii) 对于任意的 $f\in C(X)$, 定义 $\|f\|=\max\limits_{x\in X}|f(x)|$, 那么 $C(X)$ 是 Banach 空间.

(iii) **(Arzelà-Ascoli)** $C(X)$ 中的子集 A 是相对列紧集的充要条件为 A 是等度连续的有界集.

定理的证明留作练习.

下面我们列举 $C(X)$ 上的几个非平凡的定理. 对 $C(X)$ 中子集 A, 如果 A 对数乘运算和函数加法及乘法都是封闭的, 则称 A 是一个子代数, 此时若 A 还含有常数函数 $f(x)\equiv 1$, 则称 A 是带单位元的子代数. 若对任意 $f\in A$ 都有 $\bar{f}\in A$, 则称 A 是自伴的. 而 A 分离 X 中的点, 则意味着: 对任意 $x\neq y\in X$, 可找到函数 $f\in A$ 使得 $f(x)\neq f(y)$.

定理 1.6.10 (Stone-Weierstrass (斯通–魏尔斯特拉斯)) 设 X 是紧度量空间. 若带单位元的子代数 A 是自伴的, 且 A 分离 X 中点, 则 A 在 $C(X)$ 中稠密.

定理的证明参见附录.

对一个特殊情形, 在单位圆周 $\mathbb{T}=\{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}:0\leqslant x<2\pi\}$ 上, 三角多项式

$$\mathcal{P}=\left\{\sum_{k=-n}^{n}a_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}:n\in\mathbb{N},a_n\in\mathbb{C}\right\}$$

是 $\mathbb{T}$ 上一个带单位元的自伴子代数, 显然 $\mathcal{P}$ 分离 $\mathbb{T}$ 中点. 因此, 我们可得如下的稠密性结论.

定理 1.6.11 (Weierstrass 第二逼近定理) 三角多项式 $\mathcal{P}$ 在 Banach 空间 $C(\mathbb{T})$ 中稠密.

例 1.6.6 利用 Weierstrass 第二逼近定理, 也可以证明例 1.3.6, 例 1.3.7 的结果. 即

$$\{z^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}:n\in\mathbb{Z}\}$$

是 $L^2\left(\mathbb{T},\dfrac{\mathrm{d}x}{2\pi}\right)$ 的标准正交基. 实际上, 这组正交系张成的线性空间即为三角多项式 $\mathcal{P}$. 再由 $C(\mathbb{T})$ 按 L^2 范数在 $L^2(\mathbb{T})$ 中稠密, 三角多项式 $\mathcal{P}$ 也在 $L^2(\mathbb{T})$ 稠密, 由定理 1.3.2(ii) 即得所需结论.

最后我们介绍极为重要的 Schauder (绍德尔) 不动点定理, 证明可参见 Rudin (鲁丁) [18, 定理 5.28].

定理 1.6.12 (Schauder 不动点定理) *设 X 是 Banach 空间, $K\subset X$ 是空间中的紧凸集. 若 $f:K\to K$ 是连续函数, 则存在不动点 $x\in K$ 使得 $f(x)=x$.*

习题 1.6

1. 设 A 是紧的度量空间, $\{F_\lambda\}$ 是 A 的一族闭子集, 如果 $\{F_\lambda\}$ 中任意有限个 $F_{\lambda_1},F_{\lambda_2},\cdots,F_{\lambda_n}$ 的交集都不空, 那么 $\bigcap\limits_{\lambda}F_\lambda$ 也不空.

   反之, 如果度量空间 A 具有如下性质: 对于 A 中任意的闭子集族 $\{F_\lambda\}$, 从任意有限交集不空可推出 $\bigcap\limits_{\lambda}F_\lambda$ 不空, 那么 A 是紧的度量空间.
2. 验证注 1.6.1.
3. 对 $\mathbb{R}^n$ 的有界子集 E 及数 $\varepsilon>0$, 给出它的一个有限 ε-网.
4. 若度量空间 (X,d) 中的子集 A 是完全有界的, 证明: A 的任一子集 B 也是完全有界的.
5. 设 L 是赋范线性空间, A 是 L 的有界子集. 证明: A 是完全有界集的充要条件是: 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 L 的有限维子空间 M, 使 A 中每个点与 M 的距离都小于 ε.
6. 设 $C_\alpha[a,b]\,(0<\alpha\leqslant 1)$ 是 $[a,b]$ 上满足 Hölder 连续性条件:
$$\left|f(x)-f(x')\right|\leqslant M_f\left|x-x'\right|^\alpha,\quad x,x'\in[a,b]$$
   且 $f(a)=0$ 的函数全体, 这里 M_f 是正的常数. 在 $C_\alpha[a,b]$ 中规定范数如下:
$$\|f\|=\sup_{\substack{x,x'\in[a,b]\\ x\neq x'}}\frac{|f(x)-f(x')|}{|x-x'|^\alpha}.$$
   写出 $C_\alpha[a,b]$ 中的点集是完全有界集的一些条件.
7. 证明定理 1.6.7 中的必要性.
8. 对于 Banach 空间
$$C_0(\mathbb{R})=\{f\ 在\ \mathbb{R}\ 上连续:\lim_{|x|\to\infty}f(x)=0\},$$
   子集 A 相对列紧的充要条件是 A 是有界、等度连续的, 且对任意 $\varepsilon>0$, 存在数 N 使得
$$|f(x)|\leqslant\varepsilon,\quad \forall|x|>N, f\in A.$$
9. 设 X 是 Banach 空间, A 是 X 的子集. 如果 A 是相对列紧集, 那么 A 的凸包
$$co(A)=\left\{\sum_{i=1}^n\alpha_ix_i:n\in\mathbb{N}_+;\forall 1\leqslant i\leqslant n,x_i\in A,0\leqslant\alpha_i\leqslant 1;\sum_{i=1}^n\alpha_i=1\right\}$$

是相对列紧的.

10. **(Grothendieck (格罗滕迪克))** 对 Banach 空间 X 中的相对列紧集 K, 证明: 存在 X 中一个点列 $\{x_n\}$, 使得 $\lim_n x_n = 0$ 且

$$K \subset \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leqslant 1 \right\}.$$

11. 令 $B_1 = \{f \in L^1[a,b] : \|f\|_1 \leqslant 1\}$ 为实 $L^1[a,b]$ 的闭单位球. 对实值 $g \in L^\infty[a,b]$, 定义 $F_g : B_1 \to \mathbb{R}$ 为

$$F_g(f) = \int_a^b fg\mathrm{d}m.$$

证明: F_g 是 B_1 上的连续函数, 且 $\sup\limits_{f\in B_1} F_g = \|g\|_\infty$. 并说明, 当 $g(x) = x - a$ 时, 上界 $\sup\limits_{f\in B_1} F_g$ 是不可达的.

12. 证明定理 1.6.9.

13. 设 F_1 是度量空间 X 的紧子集, F_2 是 X 的闭子集, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. 证明:

$$d(F_1, F_2) = \inf\{d(x,y) : x \in F_1, y \in F_2\}$$

是一个正数.

14. 设 X 是 Banach 空间, M 和 N 是 X 的闭线性子空间, 其中 N 是有限维的, 证明 $M+N$ 是 X 的闭线性子空间.

定义 对度量空间 (X,d), 称函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 下半连续是指对于 $x \in X$, $f(x) \leqslant \lim\limits_{r\to 0} \inf\limits_{y\in O(x,r)} f(y)$.

15. 对于 X 的一个开覆盖 $\{U_i\}_i$, 定义 Lebesgue 函数

$$L(x) = \sup\{r \in \mathbb{R} : 0 < r < 1,\ 存在某个\ U_i\ 使得\ O(x,r) \subseteq U_i\}.$$

证明:

(i) L 下半连续.

(ii) 若 X 是紧的, 则 L 达到下界: 即存在 $x_0 \in X$ 使得 $L(x_0) = \inf\limits_{x\in X} L(x)$.

定义 设 X 和 Y 是度量空间, f 是 X 到 Y 中的映射, 如果对于任一正数 ε, 存在正数 δ, 当 $d(x,x') < \delta$ 时, 有 $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$, 就称 f 在 X 上是一致连续的.

16. 设 X 是紧度量空间, f 是 X 上的连续映射. 证明: f 是一致连续的.

17. **(Dini 定理)** 设 X 为紧度量空间, $\{f_k\}_k$ 是 X 上一个实值的递增连续函数列: 对任意 $x \in X$ 及正整数 k, 有 $f_k(x) \leqslant f_{k+1}(x)$. 若 $\{f_k\}$ 点态收敛于连续函数 f, 证明: $\{f_k\}$ 一致收敛于 f.