

第 1 章

拓扑空间与连续映射

拓扑学是数学的一个分支,其发展始于19世纪末.在此之前多年,数学家们就已经使用了开集的概念,其中一个简单的例子是实直线上的开区间.随着时间的推移,人们意识到直线上的开集所拥有的许多属性可以适用于任何一个集合中的某些类型的子集.最终,开集的基本属性被提炼出来,称一个集合中满足这种属性的全体开集构成的集族为拓扑,称赋予拓扑的该集合为拓扑空间.

拓扑空间和它们之间的连续映射是拓扑学的主要研究对象.本章将介绍拓扑空间和与拓扑结构密切相关的一些基本概念,搭建拓扑空间的一些最基本的结构,其中第1.1节介绍开集、闭集、邻域和拓扑子空间等概念和基本性质,第1.2节介绍拓扑基、内部、聚点、闭包、边界和点列的收敛等概念和基本性质,第1.3节介绍拓扑空间之间的连续映射、同胚映射、嵌入映射和拓扑(不变)性质等概念和基本性质.

1.1 拓扑空间

1.1.1 拓扑空间的定义

众所周知,实直线上通常的开集对任意并运算和有限交运算封闭.从这些属性出发可以给出一般拓扑空间的定义如下:

定义 1.1.1 设 X 为一个非空集合, $\mathcal{T}$ 是由 X 的若干子集构成的集族.若 $\mathcal{T}$ 满足条件

- (1) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$;
- (2) 对于 $\mathcal{T}$ 中的任意有限多个成员构成的集族 $\mathcal{U}$, $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{T}$;
- (3) 对于 $\mathcal{T}$ 中的任意成员构成的集族 $\mathcal{U}$, $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{T}$,

则称 $\mathcal{T}$ 为 X 上的一个拓扑,称 $(X, \mathcal{T})$ 为一个拓扑空间,称 $\mathcal{T}$ 中的成员为拓扑 $\mathcal{T}$ 或拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的开集.

由定义即知,集合 X 上的一个拓扑是由 X 的若干子集构成的集族,该集族至少有两个成员: X 和空集 $\emptyset$,并且该集族中的成员的任意有限交集和任意并集仍在该集族中.

通常也称拓扑定义中的条件(1)——(3)为开集公理.显然,其中条件(2)也可以换成如下等价的条件:

- (2)' $\mathcal{T}$ 中任意两个成员的交仍在 $\mathcal{T}$ 中.

注 1.1.1 构成拓扑空间有两个要素: 集合 X 和集合 X 上的满足开集公理的一个集族 $\mathcal{T}$. 拓扑空间是一个有序对 $(X, \mathcal{T})$, 有时称集合 X 连同 X 上的一个拓扑 $\mathcal{T}$ 为一个拓扑空间. 为简化表示, 我们常常称集合 X 为一个拓扑空间, 这时默认 X 上有一个确定的拓扑 $\mathcal{T}$.

例 1.1.1 设 X 为非空集合. 记 $\mathcal{T}_0 = \{X, \emptyset\}$, $\mathcal{T}_T = \{U \mid U \subset X\}$. 易见, $\mathcal{T}_0$ 和 $\mathcal{T}_T$ 都是 X 上的拓扑. 称 $\mathcal{T}_0$ 为 X 上的平凡拓扑, $(X, \mathcal{T}_0)$ 为平凡拓扑空间; 称 $\mathcal{T}_T$ 为 X 上的离散拓扑, $(X, \mathcal{T}_T)$ 为离散拓扑空间.

显然, 平凡拓扑是我们可以定义在 X 上的“最小”拓扑, 而离散拓扑则是我们可以在 X 上定义的“最大”拓扑.

例 1.1.2 设 X 为三点集 $\{a, b, c\}$. 下面的集族中哪些是 X 上的拓扑?

- (1) $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$;
- (2) $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$;
- (3) $\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$;
- (4) $\mathcal{T}_4 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$;
- (5) $\mathcal{T}_5 = \{X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$;
- (6) $\mathcal{T}_6 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

可以直接验证, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ 和 $\mathcal{T}_3$ 都满足开集公理 (1) — (3), 故它们都是 X 上的拓扑. $\{a\}$ 和 $\{b\}$ 各自都在 $\mathcal{T}_4$ 中, 但它们的并集 $\{a, b\}$ 不在 $\mathcal{T}_4$ 中 (或 $\{a, c\}$ 和 $\{b, c\}$ 的交集 $\{c\}$ 不在 $\mathcal{T}_4$ 中), 故 $\mathcal{T}_4$ 不是 X 上的拓扑. $\emptyset$ 不在 $\mathcal{T}_5$ 中, X 不在 $\mathcal{T}_6$ 中, 故 $\mathcal{T}_5$ 和 $\mathcal{T}_6$ 都不是 X 上的拓扑.

我们熟悉通常的直线 (或平面) 上的开集, 如开区间 (或开圆盘) 是开集, 对这样的开集的外观会有一个直观的了解. 但如例 1.1.2 中的 (1) — (3) 所示, 拓扑空间中的开集并非总是有这样的直观. 下面的例子也说明了这一点.

例 1.1.3 设 X 为一个无限集合. 令

$$\mathcal{T}_{fc} = \{X - F \mid F \subset X, F \text{ 为有限子集}\} \cup \{\emptyset\}.$$

下面验证 $\mathcal{T}_{fc}$ 为拓扑:

(1) $\emptyset \in \mathcal{T}_{fc}$. X 是空集的补集, 故 $X \in \mathcal{T}_{fc}$.

(2) 设 $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_{fc}$. 如果 U_1, U_2 之一为空集, 则显然有 $U_1 \cap U_2 = \emptyset \in \mathcal{T}_{fc}$. 下面假设 $U_1, U_2 \neq \emptyset$, 则存在 X 的有限子集 F_1, F_2 , 使得

$$U_1 = X - F_1, \quad U_2 = X - F_2.$$

由德摩根 (De Morgan) 法则,

$$U_1 \cap U_2 = (X - F_1) \cap (X - F_2) = X - (F_1 \cup F_2) \in \mathcal{T}_{fc}.$$

(3) 设 $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_{fc}$. 若 $\emptyset \in \mathcal{U}$, 则 $\bigcup_{U \in \mathcal{U} - \{\emptyset\}} U = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. 因此, 不妨假设每个 $U \in \mathcal{U}$ 非空, 从而存在有限子集 $F_U \subset X$, 使得 $U = X - F_U$. 注意到 $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} F_U$ 仍是一个有限集, 由德摩根法则,

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (X - F_U) = X - \bigcap_{U \in \mathcal{U}} F_U \in \mathcal{T}_{fc}.$$

称 $\mathcal{T}_{fc}$ 为 X 上的**有限补拓扑**.

例 1.1.4 设 X 为不可数集. 令

$$\mathcal{T}_{cc} = \{X - C \mid C \text{ 为 } X \text{ 的可数子集}\} \cup \{\emptyset\},$$

则类似地可以验证, $\mathcal{T}_{cc}$ 为 X 上的一个拓扑, 其开集或是空集, 或是 X 的一个可数子集的补集. 称 $\mathcal{T}_{cc}$ 为 X 上的**可数补拓扑**.

取 X 为直线 $\mathbb{R}$, 我们现在已经在 X 上定义了四种不同的拓扑: 平凡拓扑 $\mathcal{T}_0$ 、有限补拓扑 $\mathcal{T}_{fc}$ 、可数补拓扑 $\mathcal{T}_{cc}$ 和离散拓扑 $\mathcal{T}_T$. 显然有 $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_{fc} \subset \mathcal{T}_{cc} \subset \mathcal{T}_T$, 并且这里的每个包含都是真包含. 我们给出如下定义来说明两个拓扑的这种关系:

定义 1.1.2 设 X 是一个集合, $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 是 X 上的两个拓扑. 若 $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, 则称 $\mathcal{T}_2$ 比 $\mathcal{T}_1$ **精细**, 或称 $\mathcal{T}_1$ 比 $\mathcal{T}_2$ **粗糙**. 若 $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ 但 $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$ (即 $\mathcal{T}_1$ 真含于 $\mathcal{T}_2$), 则称 $\mathcal{T}_2$ 比 $\mathcal{T}_1$ **严格精细**, 也称 $\mathcal{T}_1$ 比 $\mathcal{T}_2$ **严格粗糙**.

X 上的平凡拓扑是最粗糙的拓扑, 有最少的开集 (X 和 $\emptyset$); X 上的离散拓扑有最多的开集 (X 的每个子集都是开集). 一般而言, 若 $\mathcal{T}_1$ 比 $\mathcal{T}_2$ 粗糙, 则 $\mathcal{T}_1$ 中的每个开集都可以表示成 $\mathcal{T}_2$ 中若干开集的并. 通常, 给定集合 X 上的两个拓扑无须具有可比性. 若 X 不是单点集, 很容易找到 X 上的两个拓扑 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$, 使得 $\mathcal{T}_1 \not\subset \mathcal{T}_2$ 且 $\mathcal{T}_2 \not\subset \mathcal{T}_1$, 因此这两个拓扑之间无法比较粗细.

邻域是拓扑空间中与开集密切相关的一个概念, 在后面涉及开集的讨论中几乎都要用到它.

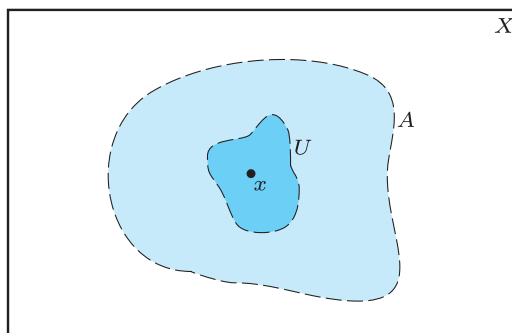
定义 1.1.3 设 X 是一个拓扑空间, $x \in A \subset X$. 若存在 X 的开集 U , 使得 $x \in U \subset A \subset X$, 则称 A 是 x 的一个**邻域**. 特别地, 若 A 就是 X 的开集, 则称 A 是 x 的一个**开邻域** (图 1.1).

下面的定理 1.1.1 给出了开集用邻域来描述的一个等价条件:

定理 1.1.1 设 X 为拓扑空间, $A \subset X$, 则 A 在 X 中是开集当且仅当对每个 $x \in A$, 存在 x 的一个邻域 (或开邻域) U_x , 使得 $x \in U_x \subset A$.

证明 必要性显然. 反之, 假设对每个 $x \in A$, 存在 x 的一个邻域 V_x (从而存在 x 的一个开邻域 $U_x \subset V_x$), 使得 $x \in U_x \subset V_x \subset A$, 则

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} U_x \subset \bigcup_{x \in A} V_x \subset A,$$

图 1.1 x 的邻域 A

从而 $A = \bigcup_{x \in A} U_x$ 是 X 中的开集. □

上述定理为我们提供了将一个开集用邻域来直观描述的等价条件, 即若一个子集中的每个点都有含于该子集的邻域, 则该子集是开集.

与开集密切相关的另一类常见子集是闭集.

定义 1.1.4 设 X 为一个拓扑空间, $A \subset X$. 若 $X - A$ 为开集, 则称 A 为闭集.

由闭集的定义可知, 一个闭集的补集是开集.

例 1.1.5 设 X 为离散拓扑空间, 则 X 的每个子集 A 是开集, $X - A$ 也是开集, 从而 $A = X - (X - A)$ 也是闭集.

例 1.1.6 设 $X = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b\}, \{b, c, d\}, \{c, d\}\}$, 则 $\mathcal{T}$ 是拓扑, $\{b\}$ 是开集但不是闭集, $\{a\}$ 是闭集但不是开集, $\{a, b\}$ 既是开集也是闭集, $\{b, c\}$ 既不是开集也不是闭集.

定理 1.1.2 设 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间, 用 $\mathcal{F}$ 表示 X 中所有闭集构成的子集族, 则下列性质成立:

- (1) $X, \emptyset \in \mathcal{F}$;
- (2) $\mathcal{F}$ 中任意多个成员的交集仍在 $\mathcal{F}$ 中;
- (3) $\mathcal{F}$ 中有限多个成员的并集仍在 $\mathcal{F}$ 中.

证明由德摩根法则立即可得.

上述定理中的 (1) — (3) 统称为**闭集公理**. 显然, 也可以从闭集公理出发来定义拓扑和拓扑空间.

1.1.2 拓扑基

在前面所有拓扑空间的例子中, 我们能够确定整个开集的集合 (即拓扑). 一般这很难做到, 所以通常我们从满足一定条件的一个较小的开集集合 (称为基) 出发, 按一定方式生成其余的开集. 下面是拓扑基的定义.

定义 1.1.5 设 X 是一个集合, $\mathcal{B}$ 是由 X 的若干非空子集构成的集合. 若 $\mathcal{B}$ 满足条件

- (1) 对于任意 $x \in X$, 存在 $B \in \mathcal{B}$, 使得 $x \in B \in \mathcal{B}$;
 - (2) 如果 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ 且 $x \in B_1 \cap B_2$, 则存在 $B \in \mathcal{B}$, 使得 $x \in B \subset B_1 \cap B_2$,
- 则称 $\mathcal{B}$ 是 X 上的一个**拓扑基** (图 1.2).

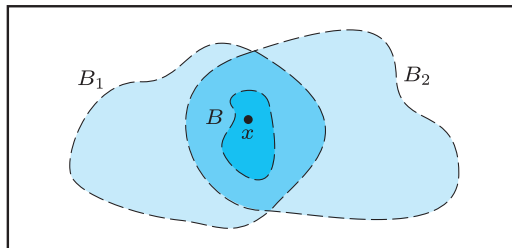


图 1.2 拓扑基的特性

设 $\mathcal{B}$ 是 X 上的拓扑基, 令

$$\mathcal{T} = \left\{ U = \bigcup_{B \in \mathcal{U}} B \mid \mathcal{U} \subset \mathcal{B} \right\},$$

则可以验证 $\mathcal{T}$ 是 X 上的拓扑:

- (1) 显然, $\emptyset \in \mathcal{T}$. 由基的定义, 对于任意 $x \in X$, 存在 $B_x \in \mathcal{B}$, 使得 $x \in B_x \in \mathcal{B}$, 故 $X = \bigcup_{x \in X} B_x \in \mathcal{T}$.

- (2) 任取 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, 若 $B_1 \cap B_2 = B \neq \emptyset$, 则对于任意 $x \in B$, 存在 $B_x \in \mathcal{B}$, 使得 $x \in B_x \subset B$, 故 $B = \bigcup_{x \in B} B_x \in \mathcal{T}$.

任取 $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, 存在 $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{B}$, 使得

$$U_1 = \bigcup_{B_1 \in \mathcal{U}_1} B_1, \quad U_2 = \bigcup_{B_2 \in \mathcal{U}_2} B_2.$$

这样就有

$$U_1 \cap U_2 = \left(\bigcup_{B_1 \in \mathcal{U}_1} B_1 \right) \cap \left(\bigcup_{B_2 \in \mathcal{U}_2} B_2 \right) = \bigcup_{B_1 \in \mathcal{U}_1, B_2 \in \mathcal{U}_2} B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}.$$

- (3) 对于任意 $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ 和任意 $U \in \mathcal{U}$, 存在 $\mathcal{B}_U \subset \mathcal{B}$, 使得 $U = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_U} B$. 这样就有

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \bigcup_{B \in \mathcal{B}_U} B = \bigcup_{B \in \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{B}_U} B \in \mathcal{T}.$$

由上可知, $\mathcal{T}$ 是 X 上的拓扑. 这里, 拓扑基的条件 (1) 蕴含 $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \in \mathcal{T}$, 条件 (2) 蕴含 $\mathcal{T}$ 满足开集公理 (2) 和 (3).

定义 1.1.6 设 X 是一个非空集合, $\mathcal{B}$ 是 X 上的拓扑基, 则称

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \left\{ U = \bigcup_{B \in \mathcal{U}} B \mid \mathcal{U} \subset \mathcal{B} \right\}$$

是由拓扑基 $\mathcal{B}$ 生成的 X 上的拓扑.

由定义即知, 拓扑基不仅可以生成拓扑, 而且拓扑基中的每个成员本身也是由基所生成的拓扑中的开集, 并且是该成员中每个元素的最小邻域. 当然, 一个拓扑本身也是一个拓扑基, 它就生成它自己.

例 1.1.7 设 X 为非空集合. 令 $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$, 则容易验证, $\mathcal{B}$ 是 X 上的一个拓扑基, 它所生成的拓扑就是 X 上的离散拓扑. 生成 X 上的平凡拓扑的基只能是 $\{X\}$.

例 1.1.8 (1) 在直线 $\mathbb{R}$ 上, 令 $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$, 则容易验证, $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个拓扑基, 它所生成的拓扑就是直线 $\mathbb{R}$ 上的通常拓扑, 也称为**标准拓扑**, 或**欧氏 (Euclid) 拓扑**. $\mathbb{R}$ 上标准拓扑中的每个开集都是 $\mathbb{R}$ 上一些开区间的并. 当我们将 $\mathbb{R}$ 称为拓扑空间时, 将始终暗含其拓扑就是标准拓扑, 除非另有说明.

(2) 在直线 $\mathbb{R}$ 上, 令 $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$, 则容易验证, $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个拓扑基, 它所生成的拓扑称为 $\mathbb{R}$ 上的**下极限拓扑** (名称来自每个基元素包含它的下极限), 并记作 $\mathbb{R}_l$. 在 $\mathbb{R}_l$ 中, $[0, 2)$ 是基中元素, 从而是开集; $(0, 2)$ 也是开集, 这是因为

$$(0, 2) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_+} \left[\frac{1}{i}, 2 \right).$$

(3) 类似地, 我们可以用基 $\mathcal{B} = \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ 来定义 $\mathbb{R}$ 上的**上极限拓扑**.

例 1.1.9 设 $\mathbb{Z}$ 为整数集合. 令

$$B(n) = \begin{cases} \{n\}, & n \text{ 为奇数}, \\ \{n-1, n, n+1\}, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$$

并记 $\mathcal{B} = \{B(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, 如图 1.3 所示, 则容易验证, $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的一个拓扑基, 它所生成的拓扑就称为 $\mathbb{Z}$ 上的**数字线拓扑**.

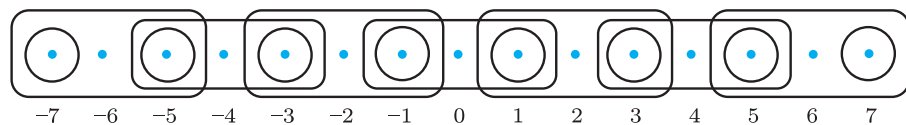


图 1.3 数字线拓扑的基成员

数字线拓扑空间中每个奇数单点集是开集, 每个偶数的最小邻域由该偶数和与它相邻的左右两个奇数构成. 这样的特性使得数字线拓扑和其推广 (数字空间拓扑) 在处理数

字图像问题时发挥了重要的作用, 参见第 10 章.

由拓扑基的定义可直接得到下面两个定理:

定理 1.1.3 设 X 为非空集合, $\mathcal{T}_B$ 是由 X 上的一个拓扑基 B 生成的拓扑, 则 $U \subset X$ 是这个拓扑空间中的开集当且仅当对任意 $x \in U$, 存在 $B_x \in B$, 使得 $x \in B_x \subset U$.

定理 1.1.4 设 $(X, \mathcal{T})$ 为一个拓扑空间, $B \subset \mathcal{T}$, 则 B 是生成拓扑 $\mathcal{T}$ 的一个拓扑基当且仅当

$$(1) X = \bigcup_{B \in B} B;$$

$$(2) \text{ 对于 } U \in \mathcal{T} \text{ 和任意 } x \in U, \text{ 存在 } B_x \in B, \text{ 使得 } x \in B_x \subset U.$$

定理 1.1.3 给出了由 X 上的一个拓扑基生成的拓扑中开集的特征描述. 给定一个拓扑 $\mathcal{T}$ 和一个开集族 $B \subset \mathcal{T}$, 定理 1.1.4 则给出确定 B 是 $\mathcal{T}$ 的一个拓扑基的判定条件.

回想对于平面 $\mathbb{R}^2$ 上的两点 $p = (p_1, p_2)$ 和 $q = (q_1, q_2)$, 其欧氏距离定义为 $d(p, q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$. 对于任意 $x \in \mathbb{R}^2$ 和 $\varepsilon > 0$, 令 $B(x, \varepsilon) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, p) < \varepsilon\}$, 称之为以 x 为圆心、 ε 为半径的开圆盘. 每个开圆盘都有如下的性质:

命题 1.1.1 设 $y \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$, 则对任意 $x \in B(y, r)$, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(x, \varepsilon) \subset B(y, r)$.

证明 由 $x \in B(y, r)$, 可知 $d(x, y) < r$. 取 $\varepsilon \in (0, r - d(x, y))$, 则对于任意 $z \in B(x, \varepsilon)$,

$$\begin{aligned} d(z, y) &\leq d(z, x) + d(x, y) < \varepsilon + d(x, y) \\ &< r - d(x, y) + d(x, y) = r, \end{aligned}$$

从而 $B(x, \varepsilon) \subset B(y, r)$, 参见图 1.4. □

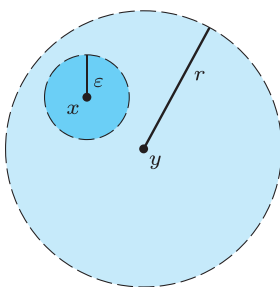


图 1.4 开圆盘的性质

定理 1.1.5 $B = \{B(x, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0\}$ 是平面 $\mathbb{R}^2$ 的一个拓扑基.

证明 任意 $x \in \mathbb{R}^2$, $x \in B(x, 1) \in B$, 故基的第一个条件满足.

设 $p, q \in \mathbb{R}^2$, $x \in B(p, r_1) \cap B(q, r_2)$. 由命题 1.1.1, 存在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, 使得 $B(x, \varepsilon_1) \subset B(p, r_1)$, $B(x, \varepsilon_2) \subset B(q, r_2)$. 取 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, 则

$$B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_1) \cap B(x, \varepsilon_2) \subset B(p, r_1) \cap B(q, r_2),$$

故基的第二个条件也满足. 这样, $\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0\}$ 是平面 $\mathbb{R}^2$ 的一个拓扑基.

□

定理 1.1.5 中的拓扑基所生成的拓扑就是平面 $\mathbb{R}^2$ 上的通常拓扑, 也称为平面的**标准拓扑**或**欧氏拓扑**. 可类似地证明下面的定理:

定理 1.1.6 对于平面 $\mathbb{R}^2$, 令 $\mathcal{B}' = \{(a, b) \times (c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d\}$, 则 $\mathcal{B}'$ 是平面 $\mathbb{R}^2$ 的一个拓扑基, 它也生成平面的标准拓扑.

定理 1.1.5 和定理 1.1.6 表明, 一个给定拓扑可以由多个不同的基生成. 此外, 它们说明了基元素的几何形状在确定拓扑中的开集方面并不重要. 具体而言, 平面上的由开圆盘构成的基与由开矩形构成的基生成的拓扑相同. 我们也可以通过一组开菱形甚至是开心形构成的基来生成相同的拓扑, 如图 1.5 所示.

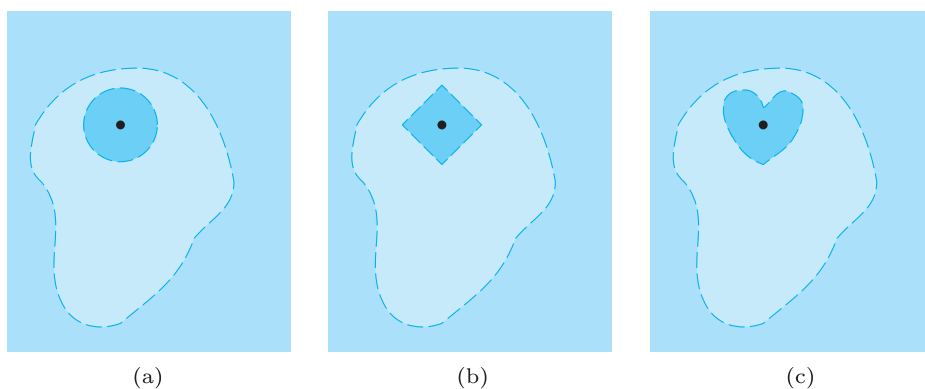


图 1.5 不同的基生成相同的平面标准拓扑

与平面 $\mathbb{R}^2$ 的情形完全类似, 对于 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的任意两点 $p = (p_1, \dots, p_n)$ 和 $q = (q_1, \dots, q_n)$, 其欧氏距离定义为

$$d(p, q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + \dots + (p_n - q_n)^2}.$$

对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $\varepsilon > 0$, 令 $B(x, \varepsilon) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid d(x, p) < \varepsilon\}$, 称之为以 x 为心、 ε 为半径的开球. 令

$$\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0\},$$

$$\mathcal{B}' = \{(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n) \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

定理 1.1.7 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑基, 且它们生成 $\mathbb{R}^n$ 的相同的拓扑, 称之为 $\mathbb{R}^n$ 的标准拓扑.

以后提到欧氏空间 $\mathbb{R}^n$, 其拓扑均默认为标准拓扑.

习题 1.1

1. (ER) 令 $X = \{a, b, c, d\}$. 判定以下它的哪一个子集族是 X 上的拓扑, 并说明理由:
 - (1) $\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}$;
 - (2) $\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, d\}$;
 - (3) $\emptyset, X, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$.
2. (E) 令 Ω 是由空集和 $\mathbb{R}$ 的所有无限子集构成的集族. Ω 是 $\mathbb{R}$ 上的拓扑吗?
3. (E) 设 X 为集合, $p \in X$. 令 $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\} \cup \{U \subset X \mid p \in U\}$. 证明 $\mathcal{T}$ 是 X 上的拓扑. 称此拓扑为 X 上的特定点拓扑.
4. (E) 设 X 为集合, $p \in X$. 令 $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\} \cup \{U \subset X \mid p \notin U\}$. 证明 $\mathcal{T}$ 是 X 上的拓扑. 称此拓扑为 X 上的排除点拓扑.
5. (ER) 在三点集 $X = \{a, b, c\}$ 上, 平凡拓扑有两个开集, 离散拓扑有八个开集. 对于 $n = 3, 4, 5, 6, 7$ 中的每一个数, 找出 X 上由 n 个开集组成的拓扑, 或证明这样的拓扑不存在.
6. (ER) 在 $\mathbb{R}$ 上定义一个拓扑 $\mathcal{T}$ (通过列出其中的开集), 使得 $(0, 2), (1, 3) \in \mathcal{T}$, 并且 $\mathcal{T}$ 包含尽可能少的开集.
7. (ER) 在五点集 $X = \{a, b, c, d, e\}$ 上找出三个非平凡、非离散的拓扑, 使得第一个比第二个严格精细, 第二个比第三个严格精细. 再在 X 上找出一个拓扑, 它和前三个拓扑中的每一个都无法比较.
8. (E) 证明在 $\mathbb{R}$ 的下极限拓扑空间中, $[a, b)$ 是闭集.
9. (MR) 确定下列哪些子集是直线 $\mathbb{R}$ 的下极限拓扑 $\mathbb{R}_l$ 的开集, 并证明之:

$$A = [1, 2), \quad B = \{3\}, \quad C = [4, 5], \quad D = (6, 7), \quad E = (8, 9].$$
10. (ER) 设 X 是拓扑空间, $U \subset X$ 是开集, $F \subset X$ 是闭集. 证明 $U - F$ 是开集, $F - U$ 是闭集.
11. (E) 证明在 $\mathbb{Z}$ 的数字线拓扑空间中, $\{n\}$ 是闭集当且仅当 n 是偶数.
12. (E) 把 $\mathbb{R}^1$ 看作 $\mathbb{R}^2$ 的 x 轴, 采用标准拓扑, 证明在 $\mathbb{R}^1$ 和 $\mathbb{R}^2$ 中均是开集的集合只有 $\emptyset$.
13. 确定下列 $\mathbb{R}$ 的子集族哪些是 $\mathbb{R}$ 上一个拓扑的基:
 - (1) (E) $\mathcal{B}_1 = \{(n, n+2) \subset \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{Z}\}$;
 - (2) (ER) $\mathcal{B}_2 = \{[a, b] \subset \mathbb{R} \mid a < b\}$;
 - (3) (ER) $\mathcal{B}_3 = \{[a, b] \subset \mathbb{R} \mid a \leq b\}$;
 - (4) (ER) $\mathcal{B}_4 = \{(-x, x) \subset \mathbb{R} \mid 0 < x \in \mathbb{R}\}$;
 - (5) (ER) $\mathcal{B}_5 = \{(a, b) \cup \{b+1\} \subset \mathbb{R} \mid a < b\}$.
14. (ER) 设 $\mathbb{Q} = \{q \in \mathbb{R} \mid q \text{ 为有理数}\}$. 证明 $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ 是通常直线拓

扑的一个基.

15. (DRH) 设 $A \subset \mathbb{R}$. 若 A 含有一个形如 $\{a, a+b, \dots, a+(n-1)b\}$ 的子集, 其中 $b \neq 0$, 则称 A 包含一个长度为 n 的算术级数. 考虑正整数集 $\mathbb{N}_+$ 的一个子集 F 的如下性质: $\exists n \in \mathbb{N}_+$, 使得 F 不包含长度为 n 的算术级数. 证明: 存在 $\mathbb{N}_+$ 上的一个拓扑, 使得有上面性质的 $\mathbb{N}_+$ 的子集和 $\mathbb{N}_+$ 本身能构成这个拓扑的一个闭子集族.

注 在求解上面问题的过程中, 可能需要用到组合数学的范德瓦尔登 (van der Waerden) 定理: $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 使得对于 $\{1, 2, \dots, N\}$ 的每一个子集 A , A 与 $\{1, 2, \dots, N\} \setminus A$ 这两个集合中至少有一个含有长度为 n 的算术级数.

16. (DRH*) 证明:

- (1) 所有由正整数组成的 (无穷) 算术级数构成了 $\mathbb{N}_+$ 上某一个拓扑的拓扑基;
- (2) 用这个拓扑来证明由所有素数组成的集合是无限集. (提示: 反证法. 证明集合 $\{1\}$ 是开集, 另一方面, 它不可能是开集, 从而矛盾.)

注 习题前标注字母的含义见前言, 后同.

1.2 内部、闭包、边界与拓扑子空间

1.2.1 内部、闭包和边界

拓扑空间的任意给定的子集 A 可能既不是开集也不是闭集. 但是, 与 A 密切关联的相关开集或闭集通常是很有用的. 特别地, 考虑含于 A 的最大开集和包含 A 的最小闭集, 它们分别是 A 的内部和 A 的闭包.

定义 1.2.1 设 X 为一个拓扑空间, $A \subset X$.

(1) 令 $\text{Int}(A)$ 是含于 A 的所有开集的并, 称之为 A 的内部. $\text{Int}(A)$ 中的点也称为 A 的内点.

(2) 令 $\text{Cl}(A)$ 是包含 A 的所有闭集的交, 称之为 A 的闭包.

下面是内部和闭包的基本性质:

定理 1.2.1 设 X 为一个拓扑空间, $A, B \subset X$.

- (1) A 的内部是含于 A 的最大开集; A 的闭包是包含 A 的最小闭集;
- (2) $\text{Int}(A) \subset A \subset \text{Cl}(A)$;
- (3) $x \in \text{Int}(A)$ 当且仅当存在 x 的邻域 U , 使得 $U \subset A$;
- (4) A 是开集当且仅当 $A = \text{Int}(A)$; A 是闭集当且仅当 $A = \text{Cl}(A)$;
- (5) 若 $A \subset B$, 则 $\text{Int}(A) \subset \text{Int}(B)$, $\text{Cl}(A) \subset \text{Cl}(B)$;
- (6) $x \in \text{Cl}(A)$ 当且仅当对 x 的每一个开邻域 (或邻域) U , $U \cap A \neq \emptyset$.

证明 由定义直接可得 (1) — (5). 下面只证 (6).

“ $\Rightarrow$ ”. 设 $x \in \text{Cl}(A)$. 若存在 x 的一个开邻域 U , 使得 $U \cap A = \emptyset$, 则 $A \subset X - U$, 从而 $\text{Cl}(A) \subset \text{Cl}(X - U) = X - U$, 矛盾.

“ $\Leftarrow$ ”. 假设对 x 的每一个开邻域 U , $U \cap A \neq \emptyset$. 若 $x \notin \text{Cl}(A)$, 则 $x \in X - \text{Cl}(A) \stackrel{\text{def}}{=} V$, 由 (1), V 为开集, 故 V 是 x 的开邻域, 从而由假设, $V \cap A \neq \emptyset$. 但显然有 $V \cap \text{Cl}(A) = \emptyset$, $A \subset \text{Cl}(A)$, 故 $V \cap A = \emptyset$, 矛盾. 故 $x \in \text{Cl}(A)$. $\square$

定理 1.2.1 的 (3) 和 (6) 分别给出了子集 A 的内部中的点和闭包中的点的特征描述.

例 1.2.1 (1) 设 $\mathbb{R}$ 为欧氏直线, $A = [0, 1)$, 则 $\text{Int}(A) = (0, 1)$, $\text{Cl}(A) = [0, 1]$.

(2) 设 $\mathbb{R}$ 为离散拓扑空间, $A = [0, 1)$, 则 $\text{Int}(A) = A = \text{Cl}(A)$.

(3) 设 $\mathbb{R}$ 为有限补拓扑空间, $A = [0, 1)$. 因 $\mathbb{R}$ 的每个非空开集均为从 $\mathbb{R}$ 上挖除有限多个点所得的子集, 它不能含于 A , 故 $\text{Int}(A) = \emptyset$.

设 F 是包含 A 的闭集. 注意到若 F 不是整个 $\mathbb{R}$, 则 F 必为有限集, 此时 F 不能包含 A , 故 F 只能是 $\mathbb{R}$. 从而 $\text{Cl}(A) = \mathbb{R}$.

(4) 设 $\mathbb{R}$ 为下极限拓扑空间, $A = [0, 1)$. 因 A 是开集, 故 $\text{Int}(A) = A$.

注意到 A 的补集 $\mathbb{R} - [0, 1) = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$ 仍为下极限拓扑空间 $\mathbb{R}$ 中的开集, 故 A 也是闭集. 从而 $\text{Cl}(A) = A$.

从以上例子可以看到, 拓扑空间中一个子集的内部和闭包不仅依赖于该子集, 还依赖于整个空间的拓扑.

例 1.2.2 设 $\mathbb{R}$ 为欧氏直线, $A = \mathbb{Q}$ 为有理数集合. 因 $\mathbb{R}$ 的任何非空开集 U 中都包含无理数, 故 $U \not\subset A$, 从而 $\text{Int}(A) = \emptyset$.

设 F 是一个闭集, $F \supset A$, 则 $\mathbb{R} - F \subset \mathbb{R} - A$. F 的补集 $\mathbb{R} - F$ 是欧氏直线 $\mathbb{R}$ 上的开集. 若 $\mathbb{R} - F \neq \emptyset$, 则 $\mathbb{R} - F$ 为 $\mathbb{R}$ 上若干开区间的并, 但每个开区间均包含 A 中元素, $(\mathbb{R} - F) \cap A \neq \emptyset$, 这样就与 $\mathbb{R} - F \subset \mathbb{R} - A$ 矛盾. 故只能是 $\mathbb{R} - F = \emptyset$, 即 $\mathbb{R} = F$, $\text{Cl}(A) = \mathbb{R}$.

定义 1.2.2 设 X 为一个拓扑空间, $A \subset X$. 若 $\text{Cl}(A) = X$, 则称 A 在 X 中是稠密的, 或称 A 是 X 的一个稠密子集.

这样, 在欧氏直线 $\mathbb{R}$ 上, $\mathbb{Q}$ 是稠密的. 容易验证, $\mathbb{R}$ 上有限补拓扑空间中的每个无限子集都是稠密子集.

下列定理给出了内部与闭包之间的关系:

定理 1.2.2 设 X 是一个拓扑空间, $A, B \subset X$, 则下列陈述成立:

- (1) $\text{Int}(X - A) = X - \text{Cl}(A)$;
- (2) $\text{Cl}(X - A) = X - \text{Int}(A)$;
- (3) $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subset \text{Int}(A \cup B)$;
- (4) $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) = \text{Int}(A \cap B)$.

证明 (1)

$$\begin{aligned}
 x \in \text{Int}(X - A) &\Leftrightarrow \text{存在 } x \text{ 的一个开邻域 } U, \text{ 使得 } U \subset X - A \\
 &\Leftrightarrow U \cap A = \emptyset \\
 &\Leftrightarrow x \notin \text{Cl}(A) \\
 &\Leftrightarrow x \in X - \text{Cl}(A).
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 x \in \text{Cl}(X - A) &\Leftrightarrow \text{对 } x \text{ 的每个开邻域 } U, U \cap (X - A) \neq \emptyset \\
 &\Leftrightarrow U \not\subset A \\
 &\Leftrightarrow x \notin \text{Int}(A) \\
 &\Leftrightarrow x \in X - \text{Int}(A).
 \end{aligned}$$

(3) $A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$, 故

$$\text{Int}(A) \subset \text{Int}(A \cup B), \quad \text{Int}(B) \subset \text{Int}(A \cup B),$$

从而 $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subset \text{Int}(A \cup B)$.

(4) $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$, 故

$$\text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int}(A), \quad \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int}(B),$$

从而 $\text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$.

反之, 设 $x \in \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$, 则存在 x 的两个开邻域 U, V , 使得 $U \subset A, V \subset B$, 故 $x \in U \cap V \subset A \cap B$, 从而 $x \in \text{Int}(A \cap B)$. 这样, $\text{Int}(A \cap B) \supset \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$. 等式成立. $\square$

定理 1.2.2(3) 中反包含关系一般不成立, 反例如下: 在欧氏直线 $\mathbb{R}$ 上, $A = [-1, 0]$, $B = [0, 1]$, 则 $\text{Int}(A) = (-1, 0)$, $\text{Int}(B) = (0, 1)$,

$$\text{Int}(A \cup B) = \text{Int}([-1, 1]) = (-1, 1) \neq \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B).$$

例 1.2.3 在欧氏直线 $\mathbb{R}$ 上, 令 $A = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ 为所有无理数集合. 从例 1.2.2 已知 $\text{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$. 由定理 1.2.2(2),

$$\text{Cl}(A) = \text{Cl}(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \mathbb{R} - \text{Int}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R},$$

从而 A 也是稠密子集.

下面将欧氏空间中的极限点概念推广到拓扑空间中.

定义 1.2.3 设 X 是一个拓扑空间, $A \subset X, x \in X$. 若对于 x 的每个邻域 U_x , $U_x \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$, 则称 x 为 A 的一个极限点 (或聚点). A 的所有极限点集合记作 A' , 称为 A 的导集.

注意, 由定义, A 的一个极限点可以在 A 中, 也可以不在 A 中, 但总在 $\text{Cl}(A)$ 中; x 永远不是 $\{x\}$ 的极限点.

例 1.2.4 设 $\mathbb{R}$ 为标准直线.

(1) 令 $A = \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$, 易见 0 是 A 的一个极限点, 且是 A 的唯一的极限点, 即 $A' = \{0\}$.

(2) 令 $A = (0, 1]$. 容易验证, $A' = [0, 1]$.

(3) 令 $\mathbb{Q}$ 为所有有理数构成的子集. 容易验证, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})' = \mathbb{R}$.

极限点提供了寻找一个子集的闭包的另外一种方式.

定理 1.2.3 设 X 是一个拓扑空间, $A \subset X$, 则 $\text{Cl}(A) = A \cup A'$.

证明 我们将证明 $\text{Cl}(A) \supset A \cup A'$ 和 $\text{Cl}(A) \subset A \cup A'$.

已知 $A \subset \text{Cl}(A)$, 下证 $A' \subset \text{Cl}(A)$. $\forall x \in A'$, 对 x 的任意开邻域 U_x , $U_x \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$, 而 $U_x \cap (A - \{x\}) \subset U_x \cap A$, 故 $U_x \cap A \neq \emptyset$. 从而, $x \in \text{Cl}(A)$. 这样就有 $A' \subset \text{Cl}(A)$, $A \cup A' \subset \text{Cl}(A)$.

反之, $\forall x \in \text{Cl}(A)$, 若 $x \in A$, 则 $x \in A \cup A'$. 下面假设 $x \notin A$. 因为 $x \in \text{Cl}(A)$, 所以对 x 的任意开邻域 U_x , $U_x \cap A \neq \emptyset$. 因 $x \notin A$, 故

$$U_x \cap (A - \{x\}) = U_x \cap A \neq \emptyset.$$

从而, $x \in A'$. 这样就有 $\text{Cl}(A) \subset A \cup A'$. □

推论 1.2.1 设 X 是一个拓扑空间, $A \subset X$, 则 A 是闭集当且仅当 $A' \subset A$.

证明 A 是闭集 $\Leftrightarrow \text{Cl}(A) = A \Leftrightarrow A \cup A' = A \Leftrightarrow A' \subset A$. □

例 1.2.5 在标准平面 $\mathbb{R}^2$ 上, 令

$$C = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \right\},$$

$$Y = \left\{ (0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \right\},$$

则容易验证, $Y \subset C'$, 且 $\text{Cl}(C) = C \cup Y$. 也称 C 为**拓扑梳子**, 如图 1.6 所示.

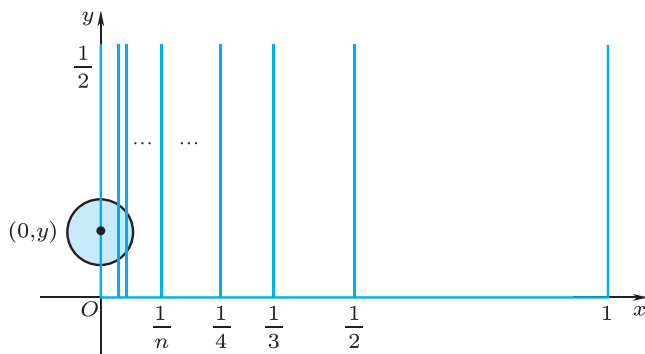


图 1.6 拓扑梳子

与极限点概念密切相关的一个概念就是点列的收敛性.

定义 1.2.4 设 X 是一个拓扑空间, $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ 是 X 中一个点列, $x \in X$. 若对于 x 的每个邻域 (或等价地, 开邻域) U , 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 使得 $n \geq N$ 时, $x_n \in U$, 则称点列 $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ **收敛到** x (或称 x 是该点列的一个**极限**), 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ 等价于任给 x 的一个邻域 U , 该点列只有有限项不在 U 中, 亦即从该点列中某项之后的项全部落入 U 中.

例 1.2.6 在标准直线 $\mathbb{R}$ 上, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. 但在有下极限拓扑的直线 $\mathbb{R}$ 上, 点列 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 不收敛到 0. 事实上, $[0, 1)$ 是 0 的一个开邻域, 显见, n 为奇数时, $x_n = \frac{(-1)^n}{n} \notin [0, 1)$.

众所周知, 在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 对于一个子集 A 的极限点 x , 总有 A 中的点列收敛到 x . 但该结论在拓扑空间中一般不成立.

例 1.2.7 令 $\mathbb{R}_{cc}$ 为直线 $\mathbb{R}$ 上的可数补拓扑空间, $A = \mathbb{R} - \{0\}$, 则 $A' = \mathbb{R}$, 但对于 $0 \in \mathbb{R}$, A 中无点列收敛到 0 (证明留作练习).

在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 收敛点列的极限是唯一的. 对于拓扑空间中的收敛点列, 上述结论一般也不成立.

例 1.2.8 令 $\mathbb{R}_{fc}$ 为直线上的有限补拓扑空间, $\{x_n = n \mid n \in \mathbb{N}_+\}$ 为 $\mathbb{R}$ 中的点列, 则该点列收敛到 $\mathbb{R}$ 中每一点. 事实上, $\forall x \in \mathbb{R}$ 和 x 的任一个开邻域 U , 存在 $\mathbb{R}$ 的有限子集 $F = \{x_1, \dots, x_m\}$, 使得 $U = \mathbb{R} - F$. 令 $M = \max\{|x_1|, \dots, |x_m|\} + 1$, 显然, 取 $N > M$, 当 $n > N$ 时, $|x_n| > M$, 故 $n > N$ 时, $x_n \in U$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

注 1.2.1 在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的标准拓扑中, 子集的极限点的定义如我们所期待的那样, 即子集中有一系列点接近极限点. 这是一个非常有用的概念. 但在拓扑空间中, 极限点的表现不像在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中那样好, 会出现一些不寻常的、也许是违反直觉的可能性, 正如例 1.2.7 和例 1.2.8 所示.

下面介绍拓扑空间中一个子集的边界点的概念. 给定拓扑空间一个子集 A , 直观上, 我们认为那些既接近 A 又接近 A 补的点是边界点 (图 1.7). 实际上, 边界点也的确是如此定义的.

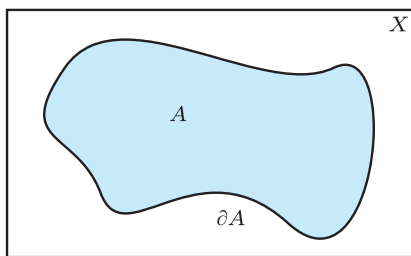


图 1.7 A 的边界

定义 1.2.5 设 X 为一个拓扑空间, $A \subset X, x \in X$. 若对于 x 的任意一个开邻域 (或邻域) $U_x, U_x \cap A \neq \emptyset$, 且 $U_x \cap (X - A) \neq \emptyset$, 则称 x 为 A 的一个边界点. A 的所有边界点构成的子集记作 ∂A , 称之为 A 的边界.

例 1.2.9 在有标准拓扑的直线 $\mathbb{R}$ 上 $A = [-1, 1]$, 则 $\text{Cl}(A) = [-1, 1], \text{Int}(A) = (-1, 1)$, 故 $\partial A = \{-1, 1\}$.

对于某些拓扑空间中的某些子集, 仅靠直觉我们难以确定其边界. 例如, 在有标准拓扑的直线 $\mathbb{R}$ 上, $\mathbb{Q}$ 作为子集的边界是什么? 在有有限补拓扑的直线 $\mathbb{R}$ 上, 闭区间的边界是什么? 下面关于边界的特征描述和性质有时候会方便地帮助我们确定一个子集的边界.

定理 1.2.4 设 X 为一个拓扑空间, $A \subset X$, 则 A 的边界 ∂A 有下列性质:

- (1) $\partial A = \text{Cl}(A) \cap \text{Cl}(X - A) = \text{Cl}(A) - \text{Int}(A)$, 从而 ∂A 是闭集;
- (2) $\partial A \cap \text{Int}(A) = \emptyset$;
- (3) $\partial A \cup \text{Int}(A) = \text{Cl}(A)$;
- (4) $\partial A \subset A$ 当且仅当 A 是闭集;
- (5) $\partial A \cap A = \emptyset$ 当且仅当 A 是开集;
- (6) $\partial A = \emptyset$ 当且仅当 A 既是开集又是闭集.

证明 这里只证 (1), 其余留作练习.

由边界的定义直接可得 $\partial A = \text{Cl}(A) \cap \text{Cl}(X - A)$, 从而 ∂A 是闭集. 由定理 1.2.2(1), $\text{Cl}(X - A) = X - \text{Int}(A)$, 又 $\text{Int}(A) \subset \text{Cl}(A)$, 故

$$\partial A = \text{Cl}(A) \cap \text{Cl}(X - A) = \text{Cl}(A) \cap (X - \text{Int}(A)) = \text{Cl}(A) - \text{Int}(A). \quad \square$$

例 1.2.10 在标准直线 $\mathbb{R}$ 上, 设 $A = \mathbb{Q}$, 因而 $\text{Cl}(A) = \mathbb{R}, \text{Int}(A) = \emptyset$, 故 $\partial A = \mathbb{R}$. 直观上看, A 的边界要比 A 大得多. 这由实数的性质决定. 事实上, 每个实数可以任意接近有理数集, 也可以任意接近无理数集 (有理数集的补集).

例 1.2.11 在标准平面 $\mathbb{R}^2$ 上, 设 $A = \{0\} \times [-1, 1]$, 则 $\text{Int}(A) = \emptyset, \text{Cl}(A) = A$, 故 $\partial A = A$. 这意味着, 从平面上看一个区间的边界和从直线上看一个区间的边界是迥然不同的.

例 1.2.12 在具有下极限拓扑的直线 $\mathbb{R}$ 上, 设 $A = [-1, 1]$, 则 $\text{Cl}(A) = A, \text{Int}(A) = [-1, 1)$, 故 $\partial A = \{1\}$.

上面的例子表明, 与内部和闭包相似, 拓扑空间的一个子集的边界不仅依赖于子集本身, 还与所在空间的拓扑密切相关.

1.2.2 拓扑子空间

设 X 为一个拓扑空间, $Y \subset X$. 基于 X 的拓扑, 可以自然定义 Y 上的一个拓扑.

设 $(X, \mathcal{T})$ 为一个拓扑空间, $Y \subset X$. 令

$$\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\},$$

则容易验证 $\mathcal{T}_Y$ 是 Y 上的一个拓扑.

定义 1.2.6 称 $\mathcal{T}_Y$ 为子空间拓扑, 称 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 为拓扑空间 X 的子空间. 若 $V \subset Y$, $V \in \mathcal{T}_Y$, 则称 V 在 Y 中是开的.

由定义, 子空间 Y 的子集为开集当且仅当它是 X 中的一个开集与 Y 的交集.

例 1.2.13 设 $\mathbb{R}$ 为欧氏直线.

(1) $Y = [0, 1]$. 在子空间 Y 中, 对于 $0 < a < b < 1$, (a, b) 是开集, $[0, a)$ 也是开集. 注意, $[0, a)$ 不是 $\mathbb{R}$ 上的开集, 见图 1.8.

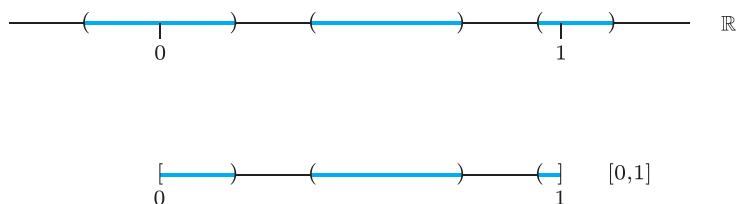


图 1.8 子空间 $[0, 1]$

(2) $\mathbb{Z}$ 为所有整数构成的子集. 对任意 $n \in \mathbb{Z}$, $\{n\} = \left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Z}$, 故 $\{n\}$ 是子空间 $\mathbb{Z}$ 的开集, 从而子空间 $\mathbb{Z}$ 是离散空间.

定义 1.2.7 设 $\mathbb{R}^n$ 为欧氏空间, $Y \subset \mathbb{R}^n$. 称 Y 上的子空间拓扑为 Y 的标准拓扑.

例 1.2.14 设 $\mathbb{R}$ 为欧氏直线, $Y = [-1, 0) \cup (0, 1]$, 则在 Y 的标准拓扑中, $[-1, 0)$, $(0, 1]$ 都是开集, 也都是闭集.

定义 1.2.8 设 X 为一个拓扑空间, $Y \subset X$ 为子空间, $C \subset Y$. 若 C 在 Y 的子空间拓扑中是闭集, 则称 C 在 Y 中是闭的.

C 在 Y 中是闭的指的是 $Y - C$ 在子空间 Y 中是开集. 与子空间中的开集类似, 也有

定理 1.2.5 设 X 为一个拓扑空间, $Y \subset X$ 为子空间, $C \subset Y$, 则 C 在 Y 中是闭集当且仅当存在 X 中闭集 F , 使得 $C = F \cap Y$.

证明 设 C 在子空间 Y 中是闭集, 则 $Y - C$ 在子空间 Y 中是开集, 从而存在 X 中开集 U , 使得 $Y - C = U \cap Y$. 故

$$\begin{aligned} C &= Y - (Y - C) = X \cap Y - (U \cap Y) \\ &= (X - U) \cap Y = F \cap Y, \end{aligned}$$

其中 $F = X - U$ 是 X 中闭集.

反之, 设存在 X 中闭集 F , 使得 $C = F \cap Y$, 则

$$Y - C = X \cap Y - F \cap Y = (X - F) \cap Y.$$

F 是 X 中闭集, 故 $X - F$ 是 X 中开集, 从而 $Y - C$ 是 Y 中开集, C 在 Y 中是闭集. $\square$

定理 1.2.6 设 $\mathcal{B}$ 为拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的一个基, $Y \subset X$, 则

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

是 Y 上子空间拓扑 $\mathcal{T}_Y$ 的一个基.

证明 对 Y 中任意开集 V , 存在 X 中开集 U , 使得 $V = U \cap Y$. $\mathcal{B}$ 为拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的一个基, 故存在 $\mathcal{B}_U \subset \mathcal{B}$, 使得 $U = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_U} B$. 故

$$V = \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_U} B \right) \cap Y = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_U} (B \cap Y),$$

从而 $\mathcal{B}_Y$ 是 Y 上子空间拓扑 $\mathcal{T}_Y$ 的一个基 (图 1.9). □

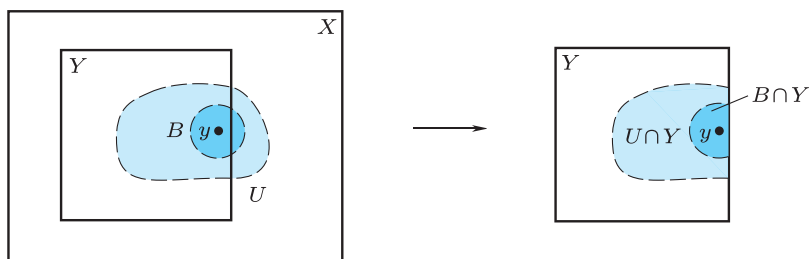


图 1.9 子空间拓扑的基

例 1.2.15 设 Y 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 上的单位圆周 S^1 , $\mathcal{B}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上所有开圆盘构成的基, 则 $\mathcal{B}_{S^1}$ 为子空间 S^1 的一个基, 如图 1.10 所示.

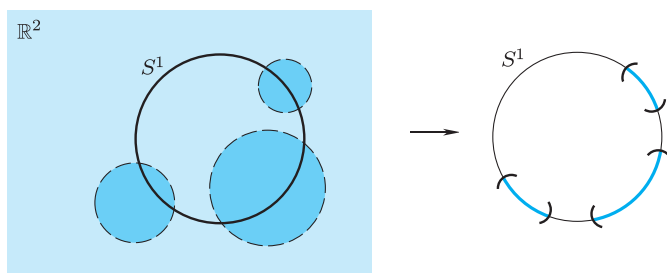


图 1.10 子空间 S^1 的基

习题 1.2

1. (ER) 确定下面每种情况中的 $\text{Int}(A)$, $\text{Cl}(A)$ 和 ∂A :

- (1) 在下极限拓扑空间 $\mathbb{R}_l$ 中, $A = (0, 1]$;
- (2) $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$, $A = \{a, c\}$;
- (3) 在欧氏直线 $\mathbb{R}$ 上, $A = (-1, 1) \cup \{2\}$;

(4) 在下极限拓扑空间 $\mathbb{R}_l$ 中, $A = (-1, 1) \cup \{2\}$;

(5) 在欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 上, $A = \{(\sin \theta, \cos \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \theta < \pi\}$.

2. (ER) 设 X 是一个拓扑空间, $A, B \subset X$. 在下述空格中填 $\subset$ 或 $\supset$ 或 $=$, 且在等号不成立时, 给出具体例子说明之:

(1) $\text{Cl}(A) \cap \text{Cl}(B) \text{ ______ } \text{Cl}(A \cap B)$;

(2) $\text{Cl}(A) \cup \text{Cl}(B) \text{ ______ } \text{Cl}(A \cup B)$.

3. (E) 设 Ω_1 和 Ω_2 是 X 上的两个拓扑, 使得 $\Omega_1 \subset \Omega_2$. 设 Cl_i 表示对应 Ω_i 的闭包, $i = 1, 2$. 证明对于任意的 $A \subset X$, $\text{Cl}_1(A) \supset \text{Cl}_2(A)$.

4. (ER) 证明 $\text{Int}(\text{Int}(A)) = \text{Int}(A)$.

5. (MRH) 在 $\mathbb{R}$ 上采用标准拓扑. 是否存在集合 $A \subset \mathbb{R}$, 分别使得

(1) $A, \text{Cl}(A), \text{Int}(A)$ 和 $\text{Cl}(\text{Int}(A))$ 两两不同?

(2) $A, \text{Cl}(A), \text{Int}(A)$ 和 $\text{Int}(\text{Cl}(A))$ 两两不同?

(3) $A, \text{Cl}(A), \text{Int}(A), \text{Int}(\text{Cl}(A))$ 和 $\text{Cl}(\text{Int}(A))$ 两两不同?

6. (MRH) 证明 $\text{Cl}(\text{Int}(\text{Cl}(\text{Int}(A)))) = \text{Cl}(\text{Int}(A))$.

7. (DRH) 解答下列问题.

(1) (库拉托夫斯基 (Kuratowski) 14 集定理) 证明在任意拓扑空间 X 中, 从一个给定的子集 A 出发, 仅用取闭包和取补两种运算, 至多可得 14 个不同的子集;

(2) 试在 $\mathbb{R}$ 中给出一个子集 A , 使经上述运算恰能得到 14 个不同的子集.

8. (DRH) 设 Cl_* 是集合 X 的所有子集的集合上的一个算子, 它具有以下性质:

(1) $\text{Cl}_*(\emptyset) = \emptyset$;

(2) $\text{Cl}_*(A) \supset A$;

(3) $\text{Cl}_*(A \cup B) = \text{Cl}_*(A) \cup \text{Cl}_*(B)$;

(4) $\text{Cl}_*(\text{Cl}_*(A)) = \text{Cl}_*(A)$.

令 $\mathcal{T} = \{X - \text{Cl}_*(A) \mid A \subset X\}$. 证明: $(X, \mathcal{T})$ 是一个拓扑空间, $\text{Cl}_*(A)$ 是空间 $(X, \mathcal{T})$ 中子集 A 的闭包.

注 由此, 我们可以从闭集出发定义拓扑.

9. (D) 类似上一题, 给出一个由集合的内部描述的公理系统定义的拓扑.

10. (E) 在直线 $\mathbb{R}$ 上, 设 $A = \left\{ \frac{a}{2^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\}$. 证明 A 是稠密的.

11. (ER) 在 $\mathbb{Z}$ 的数字线拓扑空间中, 证明所有奇数构成的子集是稠密的. 所有偶数构成的子集是否也稠密? 为什么?

12. (MR) 设 A 和 B 都是拓扑空间 X 上的稠密子集, 且 A 是开集. 证明 $A \cap B$ 也是稠密子集.

13. (MRH) 解答下列问题:

(1) 证明: $\mathbb{R}$ (标准拓扑) 中可数个稠密的开集的交集是稠密的集合;

(2) 是否可以用任意拓扑空间代替这里的 $\mathbb{R}$?

14. (E) 对于每个 $n \in \mathbb{N}_+$, 令 $B_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$, $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}_+\}$.

(1) 证明 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{N}_+$ 上一个拓扑基 (其生成的拓扑记作 $\mathcal{T}$);

(2) 证明拓扑空间 $(\mathbb{N}_+, \mathcal{T})$ 的每个趋于无穷的点列收敛到 $\mathbb{N}_+$ 中每一点.

15. (ER) 在数字线拓扑空间 $\mathbb{Z}$ 上, 确定单点集 $\{n\}$ 的极限点集.

16. (ER) 在有限补拓扑空间 $\mathbb{R}_{fc}$ 上, 确定 $[0, 1]$ 的极限点集.

17. (MR) 在有标准拓扑的直线 $\mathbb{R}$ 上, 确定 $A = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}_+ \right\}$ 的极限点集.

18. (E) 证明例 1.2.7 的结论.

19. (D*)(杨忠道定理) 证明拓扑空间中的每一个子集的导集为闭集当且仅当此空间中的每一个单点集的导集为闭集.

20. (ERH) 设 X 为一个拓扑空间, $A \subset X$. 证明:

(1) ∂A 是闭集;

(2) $\partial A \cap \text{Int}(A) = \emptyset$;

(3) $\partial A \cup \text{Int}(A) = \text{Cl}(A)$;

(4) $\partial A \subset A$ 当且仅当 A 是闭集;

(5) $\partial A \cap A = \emptyset$ 当且仅当 A 是开集;

(6) $\partial A = \emptyset$ 当且仅当 A 既是开集又是闭集.

21. (E) 在欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 上, 确定下面每种情况中的 ∂A :

(1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y \neq 0\}$;

(2) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2 - y^2 < 1\}$;

(3) $A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\}$.

22. (E) 在 $\mathbb{R}$ 的有限补拓扑空间中, 确定 $\partial[0, 1]$, 并证明之.

23. (DRH) 在实直线上找到三个边界相同的开集. 是否有可能增加这类集合的数量?

24. (ER) 设 $Y = [-1, 1]$ 为欧氏直线 $\mathbb{R}$ 的子空间. 下面哪些子集在 $\mathbb{R}$ 中是开集? 哪些在 Y 中是开集?

$$A = \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad B = \left(-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right),$$

$$C = \left[-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right], \quad D = \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right).$$

25. (ER) 设 X 为拓扑空间, $Y \subset X$ 为子空间, $A \subset Y$. 假设 A 在 Y 中是开集, Y 在 X 中也是开集. 证明 A 在 X 中是开集.

26. (EH) 设 $Y = (0, 5]$ 为下极限拓扑空间 $\mathbb{R}_l$ 的子空间. 下面哪些子集在子空间 Y

中是开集? 哪些在 Y 中是闭集?

$(0, 1), (0, 1], \{1\}, (0, 5], (1, 2), [1, 2), (1, 2], [4, 5), (4, 5]$.

27. (ER) 设 $K = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\}$ 和 $K^* = K \cup \{0\}$ 都是 $\mathbb{R}$ 的标准拓扑子空间. 证

明: K 是离散空间, 而 K^* 不是离散空间.

28. (E) 证明标准拓扑子空间 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ 不是离散空间.

29. (ER) 设 X 为拓扑空间, $U \subset X$. 证明: U 在 X 中是开的, 当且仅当 U 中的每一个点在 X 中都有一个邻域 V , 使得 $U \cap V$ 在 X 中是开的.

上述结论可重新表述为: 一个集合是开的当且仅当它在其中每个点的邻域中是开的. 从这个角度而言, 开的性质是局部的.

30. (ER) 证明闭的性质不是局部的.

31. (ER) 设 X 为拓扑空间, $A \subset X$. 如果 $X - A$ 是稠密集, 则称 A 是一个疏朗集. X 的一个子集可以同时是稠密集和疏朗集吗?

32. (DR) 解答下列问题:

- (1) 证明一个闭集的边界是疏朗集;
- (2) 上述结论对于开集的边界是否成立?
- (3) 上述结论对于任意集合的边界是否成立?

33. (DR) 证明有限个疏朗集的并集是疏朗集.

34. (DRH) 证明 $\mathbb{R}$ 不是可数多个疏朗子集的并集.

35. (H) 证明 $\mathbb{Q}$ 不是 $\mathbb{R}$ 中可数多个开集的交集.

1.3 连续映射、同胚与拓扑性质

我们已经介绍了拓扑空间以及与拓扑密切相关的多个基本概念和基本性质. 若拓扑空间中的两个点在同一个开集中, 我们就称它们是邻近的. 可以粗略地说, 拓扑结构是建立在集合上的邻近结构. 拓扑空间之间的连续映射保持邻近关系, 即把邻近的点映到邻近的点. 连续映射是沟通不同拓扑空间的重要桥梁. 本节将介绍连续映射的定义和性质, 以及同胚映射和拓扑等价.

1.3.1 连续映射及性质

回想数学分析中连续函数的定义: 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. 若任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $|x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 则称 f 在点 x_0 处连续. 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上处处连续,

则称 f 为连续函数.

如果换成球形邻域的说法, 上述定义可以重新表述为: 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. 若对于 $f(x_0)$ 的任意球形邻域 $B(f(x_0), \varepsilon)$, 存在 x_0 的球形邻域 $B(x_0, \delta)$, 使得 $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$, 则称 f 在点 x_0 处连续. 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上处处连续, 则称 f 为连续函数. 按这种形式把连续的概念推广到拓扑空间上, 就有

定义 1.3.1 设 X 和 Y 为拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$, $x_0 \in X$. 若对于 $f(x_0)$ 的任意开邻域 $V_{f(x_0)}$, 存在 x_0 的开邻域 U_{x_0} , 使得 $f(U_{x_0}) \subset V_{f(x_0)}$, 则称 f 在点 x_0 处连续. 若 f 在 X 上处处连续, 则称 f 为连续映射 (图 1.11). 当 Y 为 $\mathbb{R}$ 时, 称 f 为连续函数.

上述定义中的开邻域也可以等价地换成邻域.

注 1.3.1 可以粗略地说, 所谓的连续映射就是把 X 中邻近的点 (在一个邻域中) 映为邻近的点. 需注意, 一般而言, 连续映射不一定把开集映为开集. 例如, 对于连续函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $f((-1, 1)) = [0, 1)$.

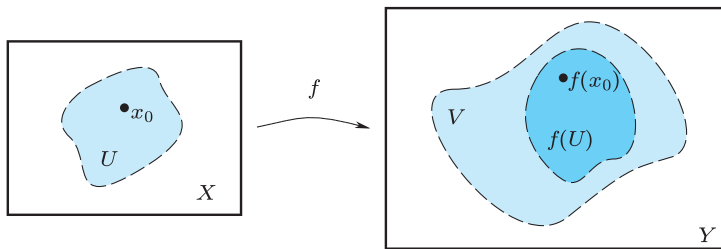


图 1.11 连续映射

映射的连续性有如下的等价描述:

定理 1.3.1 设 X 和 Y 为拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$, 则下列陈述等价:

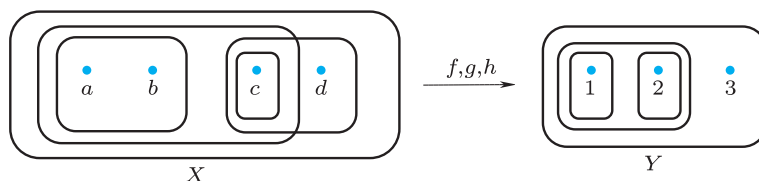
- (1) f 连续;
- (2) 对 Y 中任意开集 U , $f^{-1}(U)$ 为 X 中开集;
- (3) 对 Y 中任意闭集 F , $f^{-1}(F)$ 为 X 中闭集;
- (4) 对于 Y 的一个基 $\mathcal{B}$ 和任意 $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B)$ 为 X 中开集.

证明 这里只证 (1) 和 (2) 的等价性, 其余的等价性证明留作练习.

设 f 连续. 对 Y 中任意开集 U , 任取 $x \in f^{-1}(U)$, $f(x) \in U$, U 为 $f(x)$ 的开邻域, 故存在 x 的开邻域 W , 使得 $f(W) \subset U$. 从而 $W \subset f^{-1}(U)$. 这样, $f^{-1}(U)$ 是 X 中开集.

反之, 设 $x \in X$, 对 $f(x)$ 的任意开邻域 U , 由假设, $f^{-1}(U)$ 是 X 中开集, 且 $x \in f^{-1}(U)$. 取 $V = f^{-1}(U)$, 则 $f(V) \subset U$, 故 f 在点 x 处连续. 因 x 是在 X 中任取的, 故 f 为连续映射. $\square$

例 1.3.1 设 $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{T}_X$ 和 $\mathcal{T}_Y$ 如图 1.12 所示.

图 1.12 映射 f, g, h

令 $f, g, h : X \rightarrow Y$, 其中

$$\begin{aligned} f(a) &= f(b) = 1, & f(c) &= f(d) = 2; \\ g(a) &= g(b) = 2, & g(c) &= 1, & g(d) &= 3; \\ h(a) &= 1, & h(b) &= h(c) = 2, & h(d) &= 3. \end{aligned}$$

则容易验证, f, g 连续; 因 $h^{-1}(\{2\}) = \{b, c\}$ 不是 X 中的开集, h 不连续.

例 1.3.2 (1) 设 X 为拓扑空间. 恒等映射 $\text{id} : X \rightarrow X$ 连续, 其中, $\forall x \in X, \text{id}(x) = x$.

(2) 设 X 和 Y 为拓扑空间. 取定 $y_0 \in Y$, 定义 $C_{y_0} : X \rightarrow Y$ 如下:

$$\forall x \in X, \quad C_{y_0}(x) = y_0,$$

则常值映射 C_{y_0} 连续.

(3) 设 X 为拓扑空间, A 是 X 的子空间. 定义 $i : A \rightarrow X$ 如下: $\forall x \in A, i(x) = x$, 称 i 为 A 到 X 的含入映射 (简称 i 为含入映射), 则 i 连续.

例 1.3.3 (1) 设 $\mathbb{R}_E$ 为欧氏直线, $\mathbb{R}_{fc}$ 为直线上的有限补拓扑空间, 则 $\text{id} : \mathbb{R}_E \rightarrow \mathbb{R}_{fc}$ 连续 (每个 $\mathbb{R}_{fc}$ 中开集 U 的原像 U 是 $\mathbb{R}_E$ 中开集), 但 $\text{id} : \mathbb{R}_{fc} \rightarrow \mathbb{R}_E$ 不连续 (因 $\mathbb{R}_E$ 中开集 $(0, 1)$ 的原像 $(0, 1)$ 不是 $\mathbb{R}_{fc}$ 中开集).

(2) 设 $\mathbb{R}_E$ 为欧氏直线, $\mathbb{R}_l$ 为直线上的下极限拓扑空间. 则 $\text{id} : \mathbb{R}_E \rightarrow \mathbb{R}_l$ 不连续 ($\mathbb{R}_l$ 中开集 $[0, 1)$ 的原像 $[0, 1)$ 在 $\mathbb{R}_E$ 中不是开集), 但 $\text{id} : \mathbb{R}_l \rightarrow \mathbb{R}_E$ 连续 (因 $\mathbb{R}_E$ 中的由所有开区间构成的基中的每个开区间 (a, b) 的原像 (a, b) 是 $\mathbb{R}_l$ 中开集).

下面是连续映射的几个性质.

定理 1.3.2 设 $f : X \rightarrow Y$ 连续, $A \subset X$. 若 $x \in \text{Cl}(A)$, 则 $f(x) \in \text{Cl}(f(A))$.

证明 反证. 若 $f(x) \notin \text{Cl}(f(A))$, 则存在 $f(x)$ 的一个开邻域 U , 使得 $U \cap f(A) = \emptyset$. 因 f 连续, 故 $f^{-1}(U)$ 是 x 的开邻域, 且 $f^{-1}(U) \cap A = \emptyset$, 从而 $x \notin \text{Cl}(A)$, 与 $x \in \text{Cl}(A)$ 矛盾. $\square$

定理 1.3.3 设 $f : X \rightarrow Y$ 连续, X 中点列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 收敛到 x , 则 Y 中点列 $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ 收敛到 $f(x)$.

证明 由 f 连续可知, 对 $f(x)$ 的任意开邻域 U , $f^{-1}(U)$ 是 x 的开邻域. 因 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 收敛到 x , 故存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 使得 $n > N$ 时, $x_n \in f^{-1}(U)$. 从而 $f(x_n) \in U$, 即 $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ 收敛到 $f(x)$. $\square$

定理 1.3.4 设 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow Z$ 连续, 则 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 也连续.

证明 对 Z 中任意开集 U , 因 g 连续, 故 $g^{-1}(U)$ 是 Y 中开集. 因 f 连续, 故 $f^{-1}(g^{-1}(U))$ 是 X 中开集. 但 $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$, 故 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 连续. $\square$

下面的焊接引理在后面将被经常用到:

引理 1.3.1 (焊接引理) 设 $A, B \subset X$ 为 X 的两个闭子空间, $X = A \cup B$, $f: A \rightarrow Y$ 和 $g: B \rightarrow Y$ 连续, 且对于任意 $x \in A \cap B$, $f(x) = g(x)$. 令 $h: X \rightarrow Y$,

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g(x), & x \in B, \end{cases}$$

则 h 连续 (图 1.13).

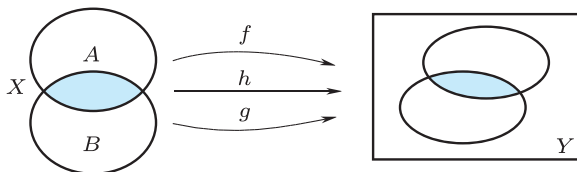


图 1.13 焊接引理

证明 对 Y 的任意闭集 F , $h^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F)$, 而由定理 1.3.1(3), $f^{-1}(F)$ 是 A 中的闭集, $g^{-1}(F)$ 是 B 中的闭集. 从而存在 X 中的闭集 C, D , 使得

$$f^{-1}(F) = C \cap A, \quad g^{-1}(F) = D \cap B.$$

这样, $h^{-1}(F) = (C \cap A) \cup (D \cap B)$ 是 X 中的闭集. 再由定理 1.3.1(3) 即知 h 连续. $\square$

注 1.3.2 将焊接引理中的闭集条件换成开集时, 结论仍成立.

1.3.2 同胚映射与拓扑性质

定义 1.3.2 设 X 和 Y 为拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 为双射. 如果 f 和 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 都是连续映射, 则称 f 为同胚映射 (或简称为同胚). 这时也称 X 和 Y 是同胚的 (或拓扑等价的), 并记作 $X \cong Y$ (或 $f: X \cong Y$).

由定义即知, 从拓扑空间 X 到 Y 的双射 $f: X \rightarrow Y$ 为同胚映射等价于 f 也是从 X 的拓扑到 Y 的拓扑的一个双射, 即 $U \subset X$ 为开集当且仅当 $f(U) \subset Y$ 为开集.

例 1.3.4 (1) 设 $X = \{a, b, c\}$ 和 $Y = \{1, 2, 3\}$,

$$\mathcal{T}_X = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}, \quad \mathcal{T}_Y = \{Y, \emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\},$$

$$f: X \rightarrow Y, f(a) = 1, f(b) = 3, f(c) = 2,$$

则 f 是同胚, X 和 Y 同胚.

(2) 设 $X = \{a, b, c\}$,

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\},$$

$$\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\},$$

$$f: (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2), f(a) = c, f(b) = b, f(c) = a,$$

则 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 是 X 上的两个拓扑, f 是同胚, X 上的这两个拓扑空间是同胚的.

容易验证, 拓扑等价 “ $\cong$ ” 的确是所有拓扑空间集合上的一个等价关系:

- (1) 恒等映射 $\text{id}: X \rightarrow X$ 是同胚;
- (2) 若 $f: X \rightarrow Y$ 为同胚, 则 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 为同胚;
- (3) 若 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow Z$ 均为同胚, 则 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 为同胚.

例 1.3.5 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$, 则 f 是通常直线到自身的同胚映射. 注意到 f 的效果是把每个实数乘 3 后再向右平移一个单位, 故 f 不保持两点间的距离不变. 实际上, 容易证明, 直线上任意两个开区间子空间是同胚的.

(1) 对任意有限开区间 $(a, b) \subset \mathbb{R}, a < b$, 设 $f: (a, b) \rightarrow (0, 1), f(x) = \frac{x-a}{b-a}$, 则 f 是同胚;

(2) 对任意无限开区间 $(a, \infty), a \in \mathbb{R}$, 设 $f: (a, \infty) \rightarrow (0, 1), f(x) = \frac{a}{x-a}$, 则 f 是同胚;

(3) 对于 $a \in \mathbb{R}$, $f: (-\infty, a) \cong (-a, \infty)$ 是同胚, 其中 $f(x) = -x$ 为反射映射;

(4) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1), f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, 则 f 为同胚.

例 1.3.6 设 $[0, 2\pi)$ 和 S^1 分别是欧氏直线和欧氏平面 (复平面) 上的标准子空间, $f: [0, 2\pi) \rightarrow S^1, f(\theta) = e^{i\theta}$, 如图 1.14 所示, 则容易验证, f 是连续双射, 但 $f^{-1}: S^1 \rightarrow [0, 2\pi)$ 不连续. 事实上, $\left[0, \frac{1}{4}\right)$ 是 $[0, 2\pi)$ 上的开集, 它在 f^{-1} 下的原像 $f\left(\left[0, \frac{1}{4}\right)\right)$ 不是 S^1 上的开集. 故 f 不是同胚.

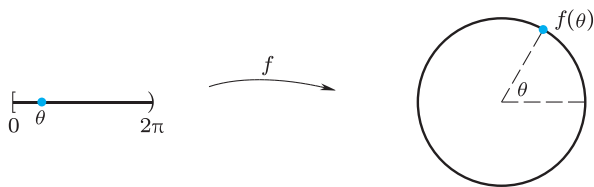


图 1.14 f 是连续双射但非同胚

在后面学习了拓扑空间的一些拓扑性质后, 我们将能证明, 这两个空间不是拓扑等价的, 即不存在从其中一个空间到另一个空间的同胚映射.

例 1.3.7 $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ 和单位开圆盘 $\text{Int}(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 <$

$1\}$ 都是欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 的子空间. 令 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow H$, $f(x, y) = (x, e^y)$, 则容易验证, f 是同胚. f 实际上把平面的开的下半平面映到 H 上满足 $0 < y < 1$ 的带状区域, 把 x 轴映到直线 $y = 1$, 而把开的上半平面映到 H 上满足 $y > 1$ 的区域.

令 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Int}(D)$, $g(x, y) = \left(\frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$, 则 g 是同胚. g 实际上是把整个平面沿从原点出发的射线压缩至 $\text{Int}(D)$ 内, 见图 1.15.

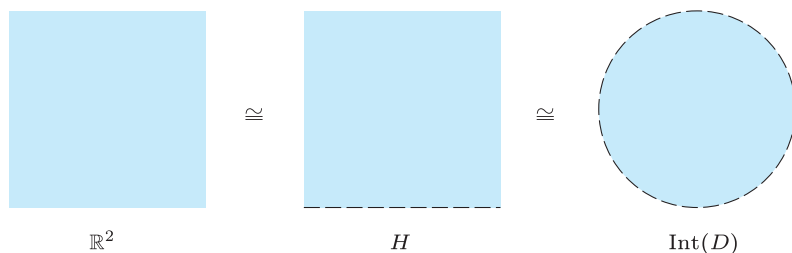


图 1.15 $\mathbb{R}^2 \cong H \cong \text{Int}(D)$

例 1.3.8 设 S^2 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面, $X = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个立方体, $a_i < -1, b_i > 1, 1 \leq i \leq 3$, $C = \partial X$, 则 $S^2 \subset \text{Int}(X)$. 令 $f: C \rightarrow S^2$, $f(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, 则 f 是同胚. 实际上, 对于从原点出发的射线 l , l 交 C 于一点 $p = (x, y, z)$, $f(p)$ 就是 l 与 S^2 的交点, 如图 1.16 所示.

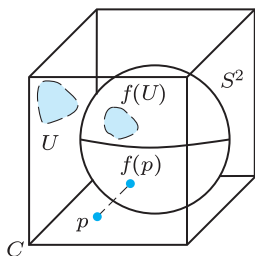


图 1.16 立方体表面与球面同胚

例 1.3.9 类似可知, 平面上的圆盘、椭圆盘、三角形和凸多边形等都同胚, 如图 1.17 所示.

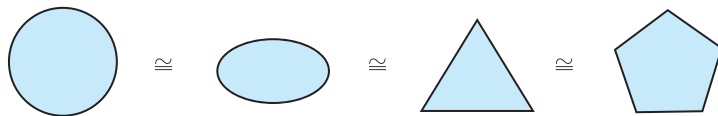


图 1.17 圆盘、椭圆盘、三角形和凸多边形等都同胚

设 X, Y 为拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 连续, 则把 $f(X)$ 看成 Y 的子空间时, 不难验证, 映射 $f: X \rightarrow f(X)$ 也是连续的.

定义 1.3.3 设 X, Y 为拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 连续. 若 $f: X \rightarrow f(X)$ 为同胚, 则称 $f: X \rightarrow Y$ 为**嵌入映射** (或简称为**嵌入**), 这时也称 X 可以**嵌入** Y .

可以把一个嵌入映射 $f: X \rightarrow Y$ 看成把 X 拓扑等价地放入 Y , 如图 1.18 所示.

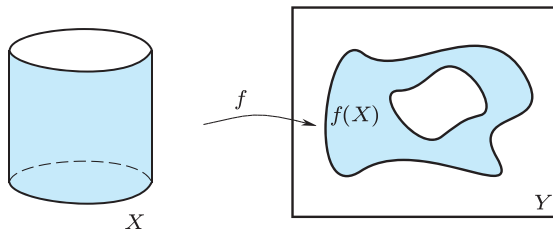


图 1.18 圆柱筒 $S^1 \times I$ 到平面的嵌入

简单弧和简单闭曲线是常见的嵌入像.

例 1.3.10 设 X 为拓扑空间.

(1) 设 $I = [0, 1]$ 为直线 $\mathbb{R}$ 上的单位区间. 若 $f: I \rightarrow X$ 为嵌入, 则称 f 的像 $f(I)$ 为 X 中的一条**简单弧**, 如图 1.19(a) 所示.

(2) 设 S^1 为平面 $\mathbb{R}^2$ 上的单位圆周. 若 $f: S^1 \rightarrow X$ 为嵌入, 则称 f 的像 $f(S^1)$ 为 X 中的一条**简单闭曲线**. 特别地, 当 X 为 $\mathbb{R}^3$ 或 S^3 时, 称 f 的像 $f(S^1)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 或 S^3 中的一个**纽结**, 如图 1.19(b) 所示.

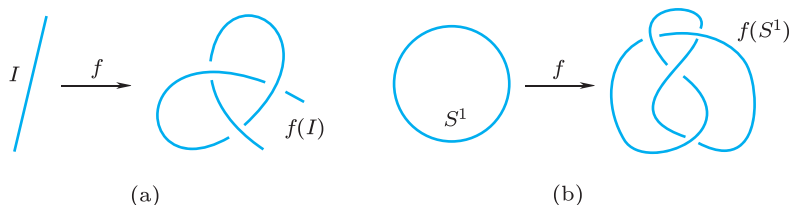


图 1.19 简单弧与简单闭曲线

从平面几何我们知道, 两个全等的三角形对应边长度相同、对应角角度相等、面积相等. 通常称对一个几何对象施行有限次的平移、旋转和镜面反射所得的变换为**刚体变换**. 把全等看成刚体变换, 则三角形的这些几何性质在全等变换下都保持不变. 如果两个三角形面积不同, 则它们一定不全等. 这启示我们有必要研究拓扑空间在同胚变换下保持不变的性质, 即**拓扑性质**.

定义 1.3.4 设拓扑空间 X 具有性质 P , 若与 X 同胚的空间都有性质 P , 则称性质 P 为**拓扑不变性质** (简称为**拓扑性质**).

换句话说, 拓扑性质就是同胚的拓扑空间所共有的性质. 易见, 长度、角度和面积等这些几何性质都不是拓扑性质. 容易验证, 可分性是一个拓扑性质. 拓扑性质是拓扑学的中心研究课题. 在后续章节, 我们将陆续介绍许多常见的拓扑性质.

注 1.3.3 拓扑性质有什么用?

前面我们已经看到通过构造同胚映射证明拓扑空间同胚的许多例子. 反之, 要证明两个拓扑空间不同胚, 若从定义出发, 则需要验证从其中一个拓扑空间到另一个拓扑空间的每个连续映射都不是同胚. 一般而言, 这是非常困难的.

我们前面证明了欧氏直线 $\mathbb{R}_e$ 与直线上的有限补空间 $\mathbb{R}_{fc}$ 不同胚, 原因是 $\mathbb{R}_{fc}$ 上的非空子集 A 为闭集当且仅当 A 是一个有限集的补集, 这实际上是一个拓扑性质, 而 $\mathbb{R}_e$ 没有这个性质, 故 $\mathbb{R}_e$ 与 $\mathbb{R}_{fc}$ 不同胚. 一般地, 如果拓扑空间 X 有拓扑性质 P , 而拓扑空间 Y 没有拓扑性质 P , 则 X 和 Y 不同胚.

习题 1.3

1. (ERH) 对任意 $A, B \subset X, C, D \subset Y$ 和 $f: X \rightarrow Y$, 则下列等式有的不成立:

- (1) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;
- (2) $f(X - A) = Y - f(A)$;
- (3) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$;
- (4) $f^{-1}(Y - C) = X - f^{-1}(C)$.

给出使得某些等式不成立的例子, 并将不成立的等式改为正确结论 (将 $=$ 换成 $\subseteq$ 或 $\supseteq$).

2. (ER) 设 $f: X \rightarrow X$. 证明下列陈述等价:

- (1) f 连续;
- (2) 对 Y 中任意闭集 F , $f^{-1}(F)$ 为 X 中闭集;
- (3) 对于 Y 的一个基 $\mathcal{B}$ 和任意 $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B)$ 为 X 中开集;
- (4) 对 X 的任意子集 $A \subset X$, $f(\text{Cl}(A)) \subset \text{Cl}(f(A))$;
- (5) 对 Y 的任意子集 $B \subset Y$, $\text{Cl}(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\text{Cl}(B))$.

3. (ERH) 在标准直线 $\mathbb{R}$ 上, 令 $X = \mathbb{R} - \{0\}$. 定义函数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 如下:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

那么 f 是连续的吗? 按数学分析中的定义, f 是连续的吗?

4. (E) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续映射, 在数学分析中也定义了连续函数. 证明这两种定义等价.

5. (EH) 设 X 是 $\mathbb{R}$ 上的下极限拓扑空间, 分别定义函数 $f, g: X \rightarrow X$ 如下:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 1; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

那么 f, g 是连续的吗? 证明所得答案.

6. (ER) 在标准直线 $\mathbb{R}$ 上, 令 $X = \mathbb{Q} - \{0\}$, $Y = \mathbb{Q} - [0, \pi]$. 定义函数 $f: X \rightarrow Y$ 如下:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x + \pi, & x > 0. \end{cases}$$

问: f 和 f^{-1} 是否是连续映射?

7. (ERH) 设 $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, 证明由方程组

$$f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0$$

的解组成的 X 的子集是闭的.

8. (ERH) 设 $f_1, f_2, \dots, f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, 证明由不等式系统

$$f_1(x) \geq 0, f_2(x) \geq 0, \dots, f_n(x) \geq 0$$

的解构成的 X 的子集为闭的, 而不等式系统

$$f_1(x) > 0, f_2(x) > 0, \dots, f_n(x) > 0$$

的解集是开的.

9. (EH) 在上两题中, 有限系统可以被无限系统取代吗?

10. (ER) 证明: 凹四边形围成的区域, 与圆盘同胚 (写出同胚映射的表达式).

11. (ER) 证明 (写出同胚映射的表达式):

(1) 三角形的边界 (1 维折线) 同胚于圆周;

(2) 三角形的内部与边界的并 (2 维区域) 同胚于闭圆盘.

12. (ERH) 证明下面的平面区域是同胚的:

(1) 整个 $\mathbb{R}^2$ 平面;

(2) 开象限 $\{(x, y) \mid x, y > 0\}$;

(3) 开角 $\{(x, y) \mid x > y > 0\}$;

(4) 平面去掉一条射线 l , 其中 $l = \{(x, y) \mid y = 0, x \geq 0\}$.

13. (E) 证明下列几个空间 (均为标准子空间) 互相同胚:

(1) $X = \mathbb{R}^2 - \{O\}$;

(2) $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

(3) Z 为单叶双曲面 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$.

14. (E) 证明 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 n 单位球面 S^n 去掉一点与 $\mathbb{R}^n$ 同胚.

15. (MRH) 设 $X = (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ 和 $Y = ((0, 1) \cup (2, 3)) \cap \mathbb{Q}$ 都是标准直线 $\mathbb{R}$ 的子空间, 证明 X 和 Y 同胚.

16. (ERH) 证明: 图 1.20 中的两个纽结同胚.

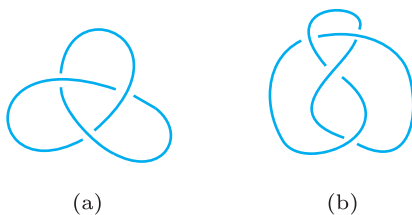


图 1.20 两个纽结

17. (EH) 设 $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ 是两个嵌入映射. 如果存在两个同胚映射 $h_X : X \rightarrow X$ 和 $h_Y : Y \rightarrow Y$, 使得 $f_2 \circ h_X = h_Y \circ f_1$, 即下面的图

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y \\ h_X \downarrow & & \downarrow h_Y \\ X & \xrightarrow{f_2} & Y \end{array}$$

可交换, 那么称 f_1 与 f_2 等价. 证明: 若任意两个纽结 $f_1, f_2 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 满足 $f_1(S^1) = f_2(S^1)$, 则这两个纽结等价.

18. (DH) 令 X 是 $\mathbb{R}^2$ 上有一个公共端点的一些线段的并集. 证明 $\mathbb{R}^2 - X$ 同胚于平面去掉一个点所得的空间 (也称其为一次穿孔平面).

19. (MRH) 令 X 是 $\mathbb{R}^2$ 上一条不封闭的有限长度的简单折线. 证明 $\mathbb{R}^2 - X$ 同胚于一次穿孔球面.

20. (MRH) 令 $K = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有限集, 称它的补集 $\mathbb{R}^2 - K$ 为一个 n 次穿孔平面. 证明: 任意两个 n 次穿孔平面都是同胚的, 即 $a_1, \dots, a_n$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中的位置不影响 $\mathbb{R}^2 - \{a_1, \dots, a_n\}$ 的拓扑类型.

21. (ERH) 设 $f : X \rightarrow Y$ 是一个同胚, $A \subset X$. 证明:

- (1) A 在 X 中是闭的当且仅当 $f(A)$ 在 Y 中是闭的;
- (2) $f(\text{Cl}(A)) = \text{Cl}(f(A))$;
- (3) $f(\text{Int}(A)) = \text{Int}(f(A))$;
- (4) $f(\partial A) = \partial f(A)$;
- (5) A 是点 $x \in X$ 的一个邻域当且仅当 $f(A)$ 是点 $f(x)$ 的一个邻域.

22. (E) 设 $f : X \rightarrow Y$ 是一个同胚. 证明对于每一个 $A \subset X$, 子映射 $f|_A : A \rightarrow f(A)$ 也是一个同胚.

23. (E) 设 $f : X \rightarrow Y$ 是一个同胚. 证明 $U \subset X$ (在 X 中) 是开的当且仅当 $f(U)$ (在 Y 中) 是开的.

24. (E) 设 X 和 Y 为拓扑空间, $f : X \rightarrow Y$. 如果 X 的任何开集 U 的像 $f(U)$ 都是 Y 中开集, 则称 f 为开映射; 如果 X 的任何闭集 F 的像 $f(F)$ 都是 Y 中闭集, 则称 f 为闭映射. 给出一个非同胚开映射 (闭映射) 的例子.

25. (E) 证明一个双射是开的当且仅当它是闭的. (这在一般情况下是不对的.)

26. (EH) 证明:

- (1) 任意严格单调的满射 $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ 都是同胚;
- (2) 当 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是满射时, f 是一个同胚当且仅当 f 是一个严格单调函数.

27. (E) 在 $X = \{a, b, c\}$ 上列举出四种拓扑, 使得对应的拓扑空间不同胚.

28. (E) 设 $X = \mathbb{R} - [0, 1)$ 为欧氏直线 $\mathbb{R}$ 的子空间, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 的定义如下:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x - 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

证明 f 是连续映射, 但不是同胚映射.

29. (M) 设 $\mathbb{R}_{cc}$ 和 $\mathbb{R}_{fc}$ 分别是直线上的可数补空间和有限补空间, $\text{id}: \mathbb{R}_{cc} \rightarrow \mathbb{R}_{fc}$ 为恒等映射. 证明 id 是连续映射, 但不是同胚映射.

30. (M) 找两个同胚的空间 X 和 Y , 以及 $X \rightarrow Y$ 的一个不是同胚的连续双射 (上题不是例子).

31. 举例:

(1) (MH) X 和 Y 是两个不同胚的拓扑空间, 但是存在两个连续双射 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow X$;

(2) (ERH) X 可以嵌入 Y , Y 也可以嵌入 X , 但 $X \not\cong Y$.

32. (ERH) 设 $\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Q}$ 带有从标准直线 $\mathbb{R}$ 诱导而来的子空间拓扑. 证明:

- (1) $\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Q}$ 不同胚;
- (2) $\mathbb{Q}$ 不能嵌入 $\mathbb{Z}$.

33. (M) 证明 $\mathbb{Z}$ 上的数字线拓扑空间与 $\mathbb{Z}$ 上的有限补拓扑空间不同胚.

34. (MR) 在 $\mathbb{R}$ 上给出两个 τ_1 和 τ_2 , 使得 τ_1 比 τ_2 严格精细, 但 $(\mathbb{R}, \tau_1) \cong (\mathbb{R}, \tau_2)$.

35. (E) 设 $f: X \rightarrow Y$ 为单射. 证明 f 是嵌入当且仅当 X 的拓扑 τ_X 是使 f 连续的最粗糙拓扑.

36. (MR) 设 X 为一个拓扑空间, $A \subset X$. 如果 $\text{Int}(\text{Cl}(A)) = \emptyset$, 则称 A 处处不稠密 (或无处稠密).

- (1) 证明一个稠密集在一个满的连续映射下的像也是稠密的;
- (2) 一个无处稠密的集合在一个连续映射下的像也是无处稠密的吗?

37. (DRH) 设 A 是平面上一条由有限条线段组成的简单 (不自相交) 封闭曲线, 它围住的封闭区域记为 U . 证明: U 与正方形围住的区域同胚. (注: 这是简单情形的若尔当 (Jordan) 曲线定理, 要想把它写清楚并不简单.)

38. (DH) 康托尔 (Cantor) 三分集 K (也常称为康托尔集) 的一种构造如下: 它是由全体形如 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ 的级数的和的实数构成的集合, 其中 $a_k \in \{0, 2\}$, $k = 1, 2, \dots$, 即 K 由形如 $0.a_1a_2 \dots a_k \dots$ 的不含有数字 1 的三进制小数构成. 请自行找资料查阅 K 的其他几何描述. 证明:

- (1) $K \subset [0, 1]$;
- (2) $K \cap \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \emptyset$;
- (3) $\forall k, s \in \mathbb{Z}, K \cap \left(\frac{3s+1}{3^k}, \frac{3s+2}{3^k}\right) = \emptyset$;
- (4) K 是实数轴中的闭集.

39. (DRH) 仿照上题的康托尔三分集, 可以构造康托尔五分集. 证明这两个康托尔集同胚.

40. (DH) 是否存在一个无处稠密子集 $A \subset [0, 1]$ (子空间拓扑) 和一个连续映射 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, 使得 $f(A) = [0, 1]$?

41. (DRH) 设 $g: I = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ 连续, $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))$. 如果 I 可以分成有限个闭区间的并, 且每个 g_i 限制在每一段小闭区间上都是一个一次函数, 则称 g 为分段线性映射.

(1) 证明存在一个分段线性映射列 $f_n: I \rightarrow I^2$, 使得

1) I^2 被分成 4^n 个边长为 $\frac{1}{2^n}$ 的全等小正方形, $f_n(I)$ 将这 4^n 个小正方形的所有中心连接起来;

2) 对于任意 $x \in I$, 有 $d(f_n(x), f_{n-1}(x)) \leq \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ (其中 d 表示在 $\mathbb{R}^2$ 上的欧氏度量);

3) 满足以上两条的 f_n 收敛到映射 $f: I \rightarrow I^2$ (即对于任意 $x \in I$, 存在一个极限 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$), 且 f 是连续的, 其像 $f(I)$ 在 I^2 内是稠密的;

4) $f(I) = I^2$. (若连续映射 $g: I \rightarrow I^2$ 的像是 I^2 的稠密子集, 则 g 是满射.)

称上述 $f: I \rightarrow I^2$ 为一条空间填充曲线, 它最早是由希尔伯特 (Hilbert) 构造的. 这个例子说明, 连续映射不保持维数不变. 在学习了后面的第 8, 9 章后, 我们可以知道同胚映射保持维数不变.

(2) 推广 (1), 分别得到连续满射 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ 和 $I \rightarrow I^n$.