

第一章

引 言

数学物理方程主要是指从物理学及其他各门自然科学中所产生的偏微分方程 (有时也包括与此相关的积分方程、积分微分方程等). 它们反映了未知函数及其偏导数 (通常是关于时间和空间变量) 的关系. 本书将介绍数学物理方程中基础性的理论.

首先, 我们介绍一般的偏微分方程的基本定义与类别.

含有未知函数偏导数的方程称为**偏微分方程 (partial differential equation)**.

设 k 为正整数, Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的连通区域, $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 为未知函数. Ω 上的 k 阶偏微分方程的一般表达式为

$$F(D^k u, \dots, u, x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

这里 $F: \mathbb{R}^{n^k} \times \dots \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 为给定的光滑函数, $D^k u$ 为 u 的 k 阶偏导数. 特别地, 当 F 关于 $D^k u, \dots, Du, u$ 均线性时, 方程

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x), \quad x \in \Omega$$

称为 k 阶**线性偏微分方程**, 这里 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$,

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u.$$

以下是几个重要的线性偏微分方程的例子:

- 调和 (Laplace (拉普拉斯)) 方程

$$\Delta u \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0,$$

其中 Δ 称为 Laplace 算子.

- Poisson (泊松) 方程

$$-\Delta u = f.$$

- 热方程

$$\partial_t u - \Delta u = 0.$$

- 反应扩散方程

$$\partial_t u - \Delta u = f.$$

- 波方程

$$\partial_t^2 u - \Delta u = f.$$

- 弹性力学方程组

$$\partial_t^2 \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = f.$$

- Schrödinger (薛定谔) 方程

$$i\partial_t u + \Delta u = 0.$$

- Maxwell (麦克斯韦) 方程组

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{E} = \operatorname{curl} \mathbf{B}, \\ \partial_t \mathbf{B} = -\operatorname{curl} \mathbf{E}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \end{cases}$$

- Cauchy-Riemann (柯西-黎曼) 方程组

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v, \\ \partial_y u = -\partial_x v. \end{cases}$$

若 F 关于 u 的最高阶导数项是线性的, 非线性只出现在函数 u 及其低阶导数项里, 则称这类方程为**半线性偏微分方程**. 以下是几个重要的半线性偏微分方程的例子:

- Navier-Stokes (纳维-斯托克斯) 方程组 ($\mu > 0$)

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} = -\nabla p, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

- Korteweg-de Vries (KdV) (科尔泰沃赫-德弗里斯) 方程

$$\partial_t u + u \partial_x u + \partial_x^3 u = 0.$$

- Black-Scholes (布莱克-斯科尔斯) 方程

$$\partial_t V + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_S^2 V + r S \partial_S V - r V = 0.$$

若最高阶导数的系数仅依赖于函数 u 及其低阶导数项, 则称这类方程为**拟线性偏微分方程**. 以下是几个重要的拟线性偏微分方程的例子:

- 守恒律方程组

$$\partial_t \mathbf{u} + \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{u}) = 0.$$

- 极小曲面方程

$$\operatorname{div} \left(\frac{D\mathbf{u}}{(1 + |D\mathbf{u}|^2)^{\frac{1}{2}}} \right) = 0.$$

- Einstein (爱因斯坦) 场方程

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

- Yang-Mills (杨-米尔斯) 方程

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^a + g f^{abc} A^{\mu b} F_{\mu\nu}^c = 0.$$

若 F 关于 u 的最高阶导数项也是非线性的, 则称这类方程为**完全非线性偏微分方程**. 以下是几个重要的完全非线性偏微分方程的例子:

- Hamilton-Jacobi (哈密顿-雅可比) 方程

$$\partial_t u + H(Du, x) = 0.$$

- Monge-Ampère (蒙日-安培) 方程

$$\det D^2 u = f.$$

从上面的这些例子, 我们可以看出**偏微分方程的来源**非常广泛, 其中最重要的来源是物理, 力学 (如弹性力学、流体力学、电动力学、量子力学等) 等学科, 以及来自数学学科的其他分支 (如复变函数、微分几何、控制理论等). 对这些数理方程, 乃至一般的偏微分方程的研究推动了这些学科及领域的发展, 甚至成为某些学科及领域研究的核心内容. 随着现代科技的发展, 偏微分方程在物理、力学以外的学科 (如生物、材料、经济、管理等), 以及在众多工程技术领域 (如航空、航天、金融、电力、水利等) 都发挥着越来越重要的作用. 这也使得偏微分方程成为了连接纯粹数学与各门自然科学及工程技术等领域的一个重要桥梁, 是数学应用的一个重要工具.

那么, 研究偏微分方程到底是研究些什么内容呢? 一般来说, **偏微分方程研究的主要内容**是求偏微分方程的解和解的性质.

对于一个偏微分方程来说, 如果一个函数具有方程中所需要的各阶连续偏导数, 且将其代入方程时恒成立, 则称此函数为该偏微分方程的**经典解**, 在本书中也简称为**解**. 除了经典解, 人们还针对不同的偏微分方程拓展了解的范畴, 引入了**弱解**、**广义解**等概念, 这使得数学理论更为完备, 还可以解释经典解无法解释的现象 (如激波现象).

一般而言, 满足偏微分方程的解是不唯一的, 为了确定一个偏微分方程的解, 还需要给出一些定解条件. 偏微分方程与定解条件一起组成**定解问题**. 要求偏微分方程定解问题的解并研究解的性质, 首要的问题是: 定解问题的提法是否合适? 例如, 这个定解问题的解是否一定存在? 在什么函数空间中存在? 这就是解的**存在性**问题. 这个定解问题的解如果存在, 是否唯一? 这就是解的**唯一性**问题. 此外, 还要考虑解的**稳定性**问题 (或称为解对定解条件中出现的函数或者方程的参数或函数的连续依赖性问题), 即当定解条件中出现的函数或方程的参数或函数作微小的变化时, 问题的解是否也作很小的变化? 定解问题的存在性、唯一性和稳定性统称为**定解问题的适定性**.

得到了解的适定性以后, 人们往往还会进一步研究偏微分方程 (定解问题) 解的性质. 例如, 解有多么光滑, 这就是解的**正则性**; 由解定义的某种“物理量”是否会在有限时间内趋向于无穷, 这就是解的**爆破**; 解是否随着时间趋于无穷而衰减到 0 或是趋向于某个平衡态, 这就是解的**渐近性态**等.

由于科学研究的自然逻辑演化,同时受到很多实际问题的驱动,人们一旦得到了数学物理方程解的适定性(可称为**正问题**)以后,还会继续研究相应的**反问题**.所谓反问题,一般是指根据事物的演化结果,由可观测的现象来探求事物的内部规律,例如**参数辨识**;也可指根据事物发展的需要或者目标,寻求系统参数所满足的条件,例如**控制问题**等.

除了研究数学物理方程的正问题及反问题相关的数学理论,根据实际应用的需要,人们还研究数学物理方程的**数值解法及计算方法**.

以上这些内容是数学物理方程,乃至一般的**偏微分方程的基本研究对象**.

那么,要如何开展数学物理方程(偏微分方程)的研究呢?著名数学家、教育家李大潜提出,开展偏微分方程研究,要把握**三点要领**: 1) 重视物理模型的驱动; 2) 重视常微分方程的驱动; 3) 重视科学计算的驱动.

从实际应用的需求出发,通过物理规律和数学建模导出偏微分方程模型及其定解问题,再利用各种数学工具得到偏微分方程正问题和反问题的数学理论.在具体的场景下,还会通过数值方法给出原问题的数值模拟,再与实际问题的数据进行对照,并将原模型加以检验修正.经过多次如上循环,最终形成与实际相符的偏微分方程模型,进而解决相应的实际问题.这个过程就充分体现了关于偏微分方程各个方面的研究在数学应用各个环节中所发挥的重要作用.

本书的主要内容为三类典型的数学物理方程(调和方程、热方程、波方程)的物理来源,定解问题的提法与适定性理论,以及相应的(经典)解的性质,并介绍这些偏微分方程理论的一些现代应用.其中,我们将重点介绍研究偏微分方程的一些重要的思想和方法,如极值原理、Green(格林)函数法、分离变量法、Fourier(傅里叶)变换法、能量积分法等.

为什么选择这三个二阶偏微分方程来讲呢?因为调和方程、热方程和波方程这三个方程反映了三类不同的物理现象,最具典型意义,处理方法上也最具代表性.

为了内容的完整性,我们在这里简单叙述一下**二阶线性偏微分方程的分类**.二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_i x_j} u + \sum_{k=1}^n b_k \partial_{x_k} u + cu = f, \quad x \in \Omega,$$

其中 a_{ij}, b_k, c, f 是区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上适当光滑的函数,且满足 $a_{ij} = a_{ji}$. 对某点 $x_0 \in \Omega$, 作关于 $\lambda \in \mathbb{R}^n$ 的二次型

$$A(\lambda) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \lambda_i \lambda_j.$$

若 $A(\lambda)$ 在 x_0 点为正定或负定的,则称该二阶偏微分方程在 x_0 点为**椭圆型**的;若 $A(\lambda)$ 在 x_0 点为退化的(即矩阵 $(a_{ij}(x_0))$ 至少有一个零特征值),则称该二阶方程在 x_0 点为

抛物型^①; 若 $A(\lambda)$ 在 x_0 点非退化, 也不为正定或负定的, 且矩阵 $(a_{ij}(x_0))$ 有 $n-1$ 个同号的特征值, 则称该二阶方程在 x_0 点为**双曲型**的. 若该二阶方程在区域 Ω 中每点处都是椭圆型 (或抛物型, 或双曲型) 的, 则称该方程是**椭圆型 (或抛物型, 或双曲型) 方程**.

容易知道, 调和方程是典型的椭圆型方程, 热方程是典型的抛物型方程, 波方程是典型的双曲型方程. 这三类数学物理方程分别描述了三种不同的物理现象, 因此在定解问题的提法、解的性质及研究方法方面, 三者之间有许多本质的差异. 同时, 这三个数学物理方程又分别反映了各自类型的偏微分方程所具有的一些共性特征, 可以作为相应类型偏微分方程的典型代表.

^① 二次型 $A(\lambda)$ 退化的情形很复杂, 因此定义抛物型方程时, 往往对方程系数再加上一些其他限制, 以使其与具有 n 个自变量的热方程有许多相似的性质.