

前言

从 2013 年起, 作者开始在首都师范大学为三、四年级本科生开设初等数论课程。该课程于 2015 年被列入数学实验班培养计划的“数学荣誉课程”, 又于 2021 年被列入拔尖计划的必修课。2022 年, 受数学“101 计划”工作组的推荐, 作者将历年授课的讲稿整理成书, 名为《数论基础》。

数论是数学中最古老的分支之一。第一部数学集大成之作作为公元前 3 世纪 Euclid 所著的《原本》。该书第七卷至第九卷为数论部分, 主要结果包括素数的无限性、Euclid 算法、算术基本定理等。我国南北朝时期的《孙子算经》给出了一次同余方程组的解法, 即孙子定理, 国外称之为中国剩余定理。17 世纪到 19 世纪, 欧洲数学家 Fermat、Euler、Lagrange、Legendre 等人的工作大大丰富了数论的内容。他们的工作集大成于 Gauss 所著的 *Disquisitiones Arithmeticae*, 中译名为《算术探索》或《算术研究》。这本书中, Gauss 证明了二次互反律和原根存在的充要条件等重要结果, 并系统研究了二元二次型理论。Gauss 这部巨著既是古典数论的集大成之作, 也是现代数论的奠基之作。

当然, 数论所包含的内容远不止这些。随着数论的日益发展, 它的内容也越发丰富。本书仅选择数论中最基础的内容进行阐述, 并使之构成一个相对完整的知识体系。本书名为《数论基础》, 其核心宗旨是对古典数论作一个系统的介绍, 并用适合当代的语言重现 Gauss 等数学家的重要思想。

本书前五章为整数的同余理论, 可作为数学类专业本科生一个学期的初等数论课程内容。第六、七、八章为三个独立的专题, 可作为一个学期选修课程的内容, 亦可作为专题研讨。本书特别注重知识体系的自洽性, 故在附录中补充了书中所涉及的代数学知识, 以便读者。此外, 本书同样适合那些学有余力且对数论感兴趣的中学生。

本册教材的编写过程中得到了很多同行、同事和学生的帮助。首先感谢数学“101 计划”数论基础工作组组长、南京大学的秦厚荣老师对我的信任。秦厚荣老师组织了教材编写研讨会。在研讨会上, 南京大学、山东大学、四川大学等院校同行就这本书的内容取材、写作风格诸多方面提出了指导性的建议。感谢我的导师清华大学的扶磊老师和首都师范大学的徐飞老师多年的培养和鼓励。他们的治学态度, 也影响了本书的写作。

在此, 我还要特别感谢中国科学院的田野院士。田野老师分享了他关于二元二次型的讲义, 这些精彩的内容极大完善了本书的知识体系。西湖大学的赵永强老师和赵以庚老师对本书的原稿提出了大量实质性和专业性的修改意见, 西北农林科技大学的林开亮老师为教材补充了有趣的素材, 对此深表感谢。

感谢工作单位对我的鼎力支持, 特别是学院张振雷、童纪龙、马雪松等同事对教材的编写做了很多的协调工作。首都师范大学拔尖班和实验班的学生报告了书稿的部分内容, 特别是张琦煜同学对书稿中的诸多疏漏提出了中肯的改进意见, 在此一并致谢。

最后还要感谢高等教育出版社的领导和相关人员, 为《数论基础》的出版提供了大力支持, 特别是杨帆和李蕊两位编辑为本册教材做了专业的校对和周到的服务。

由于作者见识的限制, 不足之处在所难免, 恳请读者批评与指正!

方江学

2024 年 7 月于花园桥