第一章

预备知识(I)

1.1 集合

数学独特的严格性, 是从对基本概念的严格定义开始的. 整个数学大厦, 是建筑在它们的严密性基础之上的. 数学研究就是在适当选择的公理和定义的基础上经严格推导获得真理的过程. 这意味着, 我们研究或者建立数学理论, 必须将一些概念或者公理当作出发点. 但是另一方面, 一些基础的概念并不是如人所愿可以给出绝对严格的定义的. 事实上, 如果所有的概念都需要从头定义, 那么我们必将陷入无限循环而无法跳出, 研究也就无从谈起. 我们在中学数学中已经接触过一些可以当作出发点的概念, 例如 Euclid (欧几里得) 几何中的点、线、面等概念. 接下来要介绍的集合这个概念, 也是数学中作为出发点的定义之一. 这也就是说, 集合是一个原始概念, 不能像数学中某些概念, 例如三角形、圆周、映射、函数那样来定义. 但是当我们提到 "全体实数组成的集合" 或 "全体中国人组成的集合" 时, 我们都明白其中的含义. **数学基础** 现在是一门数学的分支学科, 要更好地理解这方面的问题, 读者可以自行参考, 但这不是本课程的必要任务, 在此不再敷述.

下面我们通过基本性质描述性地引入集合这个概念, 作为本课程研究内容的一个基础:

- **集合**是由一些被称为**元素**的成员组成的, 如果集合中的元素具有**明确性**, 即给定任何一个集合 S 和任何一个元素 a, 要么明确 a 在 S 中 (称为 a **属于**S, 表示为 $a \in S$), 要么明确 a 不在 S 中 (称为 a **不属于**S, 表示为 $a \notin S$).

- 存在不包含任何元素的集合, 叫做**空集合**或者**空集**, 表示成 $\varnothing$ (即对于任何元素 a 均有 $a \notin \varnothing$).

因此像 "由某些整数组成的集合" 这样的说法是不合理的, 因为从定义无法确定 0 是否在其中. 而 "全体素数组成的集合" 这样的说法是合理的. 事实上, 虽然要判断一个具体的正整数是否为素数非常困难. 但是任何一个正整数要么是素数, 要么不是素数, 这一点却是明确的.

现在我们复习一些关于集合的内容 (并、交、映射等).

(i) 如果集合 A 中的元素全都在 B 中, 即由 $a \in A$ 可以推出 $a \in B$, 我们就说 B 包含 A, 或 A 包含于 B, 也说 A 是 B 的一个子集, 记为 $A \subseteq B$. 显然, 对于任意集合 A, 总有 $\varnothing \subseteq A$.

(ii) $A = B$ 当且仅当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.

(iii) 对于每个集合 A, 由 A 的所有子集构成一个集合, 记为 $P(A)$ 或 2^A, 称为 A 的**幂集**.

(iv) 以非空集合 I 作下标的**集族**, 是对每个 $i \in I$, 给定一个集合 A_i. 给定这样一

个集族, 它的**并**和**交**分别定义为集合:

$$\bigcup_{i\in I} A_i=\{x \mid \exists i\in I,\, x\in A_i\},\quad \bigcap_{i\in I} A_i=\{x \mid \forall i\in I,\, x\in A_i\}.$$

如果 $I=\{1,2,\cdots,n\}$, 它们的并和交分别记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 和 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$. 如果 $A\cap B=\varnothing$, 那么称 A 和 B 是**非交**的, 这时也称 $A\cup B$ 是 A 与 B 的**无交并**, 表示为 $A\sqcup B$.

(v) $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$.

(vi) 对集合 A 和 B, A 在 B 中的**相对补**是 B 的如下子集:

$$B\setminus A=\{x \mid x\in B, x\notin A\}.$$

对集合 A 和集族 A_i $(i\in I)$, 不难验证如下等式成立:

(vii) $A\cap\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)=\bigcup_{i\in I}(A\cap A_i)$, $A\cup\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)=\bigcap_{i\in I}(A\cup A_i)$;

(viii) $A\setminus\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)=\bigcap_{i\in I}(A\setminus A_i)$, $A\setminus\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)=\bigcup_{i\in I}(A\setminus A_i)$ (De Morgan (德摩根) 法则).

数的集合是数学理论中最基本的集合和研究对象. 通常我们用 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 分别表示全体整数、全体有理数、全体实数和全体复数所构成的集合. 本书中自然数指非负整数, 自然数集记为 $\mathbb{N}$, 正整数集和正实数集分别记为 $\mathbb{N}_+$ 和 $\mathbb{R}_+$.

习题 1.1

1. 设 X 是集合. 对 $A,B\in 2^X$ 定义对称差 $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. 证明如下性质, 其中 $A,B,C\in 2^X$:

(i) $A\Delta B=B\Delta A$;

(ii) $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$;

(iii) $A\Delta\varnothing=A$;

(iv) $(A\Delta B)\cap C=(A\cap C)\Delta(B\cap C)$;

(v) $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

2. 设 X 为集合, $A,B,C\in 2^X$. 证明 $A\cap B\subseteq C$ 当且仅当 $A\subseteq(X\setminus B)\cup C$.

3. 设 S 是一个有限集且有 n 个元素，证明 S 共有 2^n 个子集 (包括空集).

1.2 映射

定义 1.2.1 若 X 和 Y 是集合, φ 是从 X 到 Y 的一个对应法则, 使得对 X 中的任意元素 x, 在对应法则 φ 下都有 Y 中的唯一一个元素 y 与之对应, 则称 φ 是从 X 到 Y 的一个**映射**.

值得注意的是, 数学中也会出现这样的对应法则: 对于 X 中的一个元素 x, 可能存在不止一个 Y 中的元素与之对应. 这样的对应一般称为多值映射. 多值映射在复变函数中非常常见. 本书中的映射指的是定义 1.2.1 中的对应.

通常将从 X 到 Y 的映射 φ 记作 $\varphi : X \to Y, x \mapsto \varphi(x)$, 也简记作 $\varphi : X \to Y$. 对 X 中的元素 x, 若 $y \in Y$ 满足 $y = \varphi(x)$, 则称 y 是 x 在 φ 下的**像**, 而称 x 是 y 在 φ 下的一个**原像**. 称 $\varphi(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi(x) \mid x \in X\}$ 为 φ 的**像集**, 也记作 $\operatorname{Im}\varphi$. 显然当 X 非空时, $\varphi(X)$ 也非空. 由定义 1.2.1, 要验证从 X 到 Y 的一个对应法则 φ 是映射, 我们需要验证两条性质:

(i) $\forall x \in X$, 均有 Y 中的元素与之对应, 即 $\forall x \in X$, $\varphi(x)$ 均有意义.

(ii) $\forall x, x' \in X$, 若 $x = x'$, 则 $\varphi(x) = \varphi(x')$, 即与 x 对应的像是唯一的.

例 1.2.1 对应法则 $\varphi : x \mapsto x^2, x \in \mathbb{R}$ 构成从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射. 对应法则 $\varphi_1 : x \mapsto \pm\sqrt{x}, x \in \mathbb{R}_+$ 不构成从 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射. 但 $\varphi_2 : x \mapsto \sqrt{x}, x \in \mathbb{R}_+$ 和 $\varphi_3 : x \mapsto -\sqrt{x}, x \in \mathbb{R}_+$ 均构成从 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射.

例 1.2.2 设 X 是集合. 对应法则 $X \to X, x \mapsto x$ 是定义在 X 上的一个映射, 称为 X 上的**单位映射**或者**恒等映射**, 记作 id_X.

例 1.2.3 设 n 是一个正整数, $Y = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$, $X = \mathbb{N}$. 由整数理论, 对任意 $x \in X$, 存在唯一的 $q \in X$, $y \in Y$, 使得

$$x = qn + y. \tag{1.1}$$

通常称 y 是 x 除以 n 的**余数**. 定义 X 到 Y 的对应法则 φ 如下: 对 X 中的任意元素 x, Y 中对应的元素 y 由 (1.1) 式确定, 即

$$y = \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = qn + y, \quad 0 \leqslant y < n.$$

那么 φ 是从 X 到 Y 的一个映射.

定义 1.2.2 设 X, Y, Z, W 为集合, $\varphi : X \to Y$ 和 $\psi : Z \to W$ 为映射. 若 $X = Z$, $Y = W$ 且 $\varphi(x) = \psi(x)$, $\forall x \in X$, 则称映射 φ 和 ψ **相等**, 记作 $\varphi = \psi$.

定义 1.2.3 若 X, Y, Z 为集合, $\varphi : X \to Y$ 和 $\psi : Y \to Z$ 为映射, 则映射

$$\psi \circ \varphi : X \to Z, \quad x \mapsto \psi(\varphi(x)),$$

称为 φ 和 ψ 的**复合映射**, 也记作 $\psi\varphi$.

定义 1.2.4 设 X, Y 为集合, $\varphi: X \to Y$ 为映射. 若对任意 $y \in Y$, 存在 $x \in X$ 使得 $y = \varphi(x)$, 则称 φ 为从 X 到 Y 上的一个**满射**.

依定义 1.2.4, φ 是从 X 到 Y 上的一个满射的充要条件是 Y 中的任意一个元素均是 X 中某个元素在 φ 下的像, 或者说 Y 中的任意一个元素在 X 中能至少找到一个原像.

例 1.2.2 中的单位映射是从 X 到其自身上的一个满射, 例 1.2.3 中的 φ 是从 X 到 Y 上的一个满射, 而例 1.2.1 中的所有映射均不是从 X 到 Y 上的满射.

设 $\varphi: X \to Y$ 是映射. 对 $y \in Y$, 称

$$\varphi^{-1}(y) = \{x \in X \mid \varphi(x) = y\}$$

为 y 在 φ 下的**原像集**. 显然若 φ 不是从 X 到 Y 上的满射, 则 $\exists y \in Y$, $\varphi^{-1}(y) = \varnothing$. 若 φ 是从 X 到 Y 上的一个满射, 则 $\forall y \in Y$, $\varphi^{-1}(y) \neq \varnothing$.

定义 1.2.5 设 X, Y 为集合, $\varphi: X \to Y$ 为映射. 若对 $x, x' \in X$, $x \neq x'$, 必有 $\varphi(x) \neq \varphi(x')$, 则称 φ 是从 X 到 Y 的一个**单射**, 或从 X 到 Y 的一个 **1-1 映射**.

依定义 1.2.5, 映射 $\varphi: X \to Y$ 是单射的充要条件是 X 中任意两个不同的元素在 φ 下的像也不同, 或者说 Y 中任意一个元素在 φ 下的原像集是空集或单点集, 或者说若 $x, x' \in X$ 满足 $\varphi(x) = \varphi(x')$ 则 $x = x'$.

例 1.2.1 中的映射 φ_2 和 φ_3 均为从 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}$ 中的单射, 例 1.2.2 中的单位映射是从 X 到自身的一个单射, 而例 1.2.3 中的映射 φ 不是单射.

关于单射和满射, 由复合映射的定义我们有

性质 1.2.1 设 X, Y, Z 为集合, $\varphi: X \to Y$ 和 $\psi: Y \to Z$ 为映射.

(i) 若 φ, ψ 都是单射, 则 $\psi\varphi$ 是单射; 反之若 $\psi\varphi$ 是单射, 则 φ 是单射.

(ii) 若 φ, ψ 都是满射, 则 $\psi\varphi$ 是满射; 反之若 $\psi\varphi$ 是满射, 则 ψ 是满射.

作为练习, 请读者自行证明这一性质.

定义 1.2.6 设 X, Y 为集合. 若映射 $\varphi: X \to Y$ 既是单射又是满射, 则称 φ 是从 X 到 Y 上的一个**双射**, 或从 X 到 Y 上的一个 **1-1 对应**.

例 1.2.2 中的单位映射是定义在 X 上的一个双射. 例 1.2.1 和例 1.2.3 中的映射均不是双射.

性质 1.2.2 设 $\varphi: X \to Y$ 是从 X 到 Y 上的一个双射. 定义从 Y 到 X 的对应法则 $\psi: Y \to X$ 如下: $\forall y \in Y$, 若 $x \in X$ 是 y 在 φ 下的原像, 则令 $x = \psi(y)$. 那么 $\psi: Y \to X$ 是从 Y 到 X 上的一个双射.

证明 由双射的定义直接验证即可. □

定义 1.2.7 设 X, Y 为集合, $\varphi: X \to Y$ 为映射. 若存在映射 $\psi: Y \to X$ 满足

$$\psi\varphi = \mathrm{id}_X, \quad \varphi\psi = \mathrm{id}_Y,$$

则称映射 φ 是一个**可逆映射**, 并称映射 ψ 是 φ 的**逆映射**, 记为 $\psi=\varphi^{-1}$.

定理 1.2.1 设 X,Y 为集合. 映射 $\varphi: X\to Y$ 是可逆映射的充要条件是 φ 是双射.

请读者自行证明这个定理 (性质 1.2.2 可以作为此定理充分性证明的一个部分, 即性质 1.2.2 中的 ψ 恰是双射 φ 的逆映射).

定义 1.2.8 对映射 $\varphi: X\to Y$ 和 X 的子集 X', 定义 φ 在 X' 上的**限制映射** (简称**限制**) 为

$$\varphi|_{X'}: X'\to Y,\quad x'\mapsto\varphi(x').$$

由于 X' 中的任意元素在映射 $\varphi|_{X'}$ 和 φ 下的像是相同的, 在不致产生混淆的情况下常把 $\varphi|_{X'}$ 仍写为 φ. 但要注意当 $X'\subsetneqq X$ 时, $\varphi|_{X'}$ 与 φ 必然是不同的, 因为它们的定义域不同.

习题 1.2

1. 设 M,N 分别是包含 m 个元素和 n 个元素的集合, m,n 为非负整数.

(i) 从 M 到 N 可建立多少个映射?

(ii) 从 M 到 N 可建立满射、单射、双射的条件分别是怎样的? 各能建立多少个?

2. 试给出整数集到自然数集的两个不同的映射.

3. 令 M 为由所有非负实数构成的集合, $M'=[0,1]$. 试给出从 M 到 M' 中的一个单射.

4. 试在闭区间 $[0,1]$ 与 $[a,b]\,(a<b)$ 之间建立两个双射.

5. 设 φ 是从集合 X 到 Y 的一个映射. 对 X 的子集 A, 记 $\varphi(A)=\{\varphi(x)\mid x\in A\}$ 并称之为 A 在映射 φ 下的像. 求证: 对于 X 的任意两个子集 A, B 均有

(i) $\varphi(A\cup B)=\varphi(A)\cup\varphi(B)$;

(ii) $\varphi(A\cap B)\subseteq\varphi(A)\cap\varphi(B)$.

6. 证明性质 1.2.1.

7. 设 A 是非空集合, $P(A)$ 是 A 的幂集. 求证: 不存在 $P(A)$ 到 A 的双射.

1.3 集合的直积与运算

运算是后文中定义线性空间需要用到的主要概念. 本节我们利用映射来描述两类运算.

设 X, Y 是集合. 对 $x\in X$, $y\in Y$, 称 (x,y) 为一个**有序元素对**. 称集合 $\{(x,y)\mid$

$x \in X, y \in Y\}$ 为 X 与 Y 的**直积**或 **Descartes (笛卡儿) 积**, 通常记作

$$X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

若 $X = Y$, 则记 $X^2 = X \times X$.

多个集合的直积可以类似定义. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个集合, 则它们的直积为

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in X_i,\ i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

例 1.3.1 设 $X = Y = \mathbb{R}$, 则所有有序实数对 (x,y) 构成平面上点的坐标集 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 即为平面解析几何所涉及的平面, 记为 $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ 或 $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \right\}$. 类似地, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \cdots, n\}$.

定义 1.3.1 设 X, Y, Z 为集合. 称从 $X \times Y$ 到 Z 的一个映射 $\varphi : X \times Y \to Z$ 为**从集合 X, Y 到集合 Z 的一个二元运算**. 若 $x \in X, y \in Y, z \in Z$ 满足 $z = \varphi(x,y)$, 则记 $z = x\varphi y$. 有时也用其他符号如 $+$, Δ, $\oplus$, $\cdot$, $\odot$, $\circ$ 等代替 φ.

若 $X = Y = Z$, 则称上述映射 φ 为**X 上的一个二元运算**.

例 1.3.2 (i) 设 X, Y, Z 为集合, $M_1 = \{$从 X 到 Y 的映射全体$\}$, $M_2 = \{$从 Y 到 Z 的映射全体$\}$, $M_3 = \{$从 X 到 Z 的映射全体$\}$. 令 $\phi \diamond \psi = \psi\phi$, $\forall \phi \in M_1$, $\psi \in M_2$, 则 $\diamond$ 是从 M_1, M_2 到 M_3 的一个二元运算, 实际上它就是映射的复合运算.

(ii) 设 $X = \mathbb{R}$. 令 $x\varphi y = x + y$, $\forall x, y \in X$, 则 φ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个二元运算, 实际上它就是实数的加法运算.

(iii) 设 $X = \mathbb{R}$. 令 $x\varphi y = x \cdot y$, $\forall x, y \in X$, 则 φ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个二元运算, 实际上它就是实数的乘法运算.

(iv) 设 $X = \{$定义在区间 $[a,b]$ 上的实值函数$\}$. 令

$$f(x)\varphi g(x) = f(x)g(x), \quad \forall f(x), g(x) \in X,$$

则 φ 是 X 上的一个二元运算. 众所周知, 它是函数的乘积.

(v) 在平面上建立坐标系, 设 $X = \{$起始于原点的向量$\}$, 则向量按三角形法则或平行四边形法则所定义的向量加法运算也是二元运算.

(vi) 设 $X = \mathbb{R}$. 定义 $x \oplus y = \mathrm{e}^{x+y}$, $\forall x, y \in X$, 则 $\oplus$ 也是 $\mathbb{R}$ 上的一个二元运算.

上述例子表明, 通常熟知的一些运算均可统一到定义 1.3.1 所给出的二元运算的范畴中.

定义 1.3.2 设 F 为 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 而 X 为非空集合. 若映射 $\phi : F \times X \to X$ 满足

$$\phi(\alpha, \phi(\beta, x)) = \phi(\alpha\beta, x), \quad \forall \alpha, \beta \in F,\ x \in X,$$

则称 ϕ 为 F 在 X 上的一个**数乘运算**, 简称**数乘**. 通常记 $\alpha x = \phi(\alpha, x)$.

关于数乘更一般的定义和理解, 我们将在引入线性空间时加以讨论.

例 1.3.3　(i) 设 X 为例 1.3.2 (iv) 中所定义的集合, $F=\mathbb{R}$, 则实数与实值函数的乘积就是 X 上的一个数乘运算.

(ii) 设 $F=\mathbb{R}$, $X=\mathbb{R}$, 则实数与实数的乘法可以看作 X 上的一个数乘运算.

上述例子表明, 定义 1.3.2 中看似抽象的数乘运算本质上给出了一些熟知运算的统一描述.

习题 1.3

1. 下列对应法则中, 哪些是同一个集合的二元运算, 哪些不是, 为什么?

(i) $a\odot b=a^b,\ \forall a,\, b\in\mathbb{Z}_+$;

(ii) $a\odot b=3(a+b)$, $\forall a,\ b\in\mathbb{R}$;

(iii) 设集合 $A=\{1,-1\}$. 令 $a\varphi b=ab$, $\forall a,\, b\in A$;

(iv) 设 $P(A)$ 是 A 的幂集. 令 $A_1\varphi A_2=A_1\cap A_2$, $\forall A_1,\, A_2\in P(A)$;

(v) 在 (iv) 中, 如果令 $A_1\varphi A_2=A_1\cup A_2$ 呢?

2. 设二元运算 $X\times X\to X$, $(x,y)\mapsto x*y$ 满足对任意 $x,y,z\in X$, 有

(i) $(x*y)*z=x*(y*z)$;

(ii) $(x*y)*y=x$, $y*(y*x)=x$,

求证: $x*y=y*x$, $\forall x,y\in X$.

3. 定义二元运算 $\circ:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $i\circ j=i+j+ij$. 求证: $(i\circ j)\circ k=i\circ(j\circ k)$, $\forall i,j,k\in\mathbb{Z}$.

4. 设 $f:A\to C$, $g:B\to D$ 是映射. 对任意 $(a,b)\in A\times B$, 定义

$$(f\times g)(a,b)=(f(a),g(b)).$$

证明: $f\times g$ 是 $A\times B$ 到 $C\times D$ 的映射, 并且若 f,g 皆为满映射 (单映射), 则 $f\times g$ 也是满映射 (单映射).

5. 设 A,B 是非空集, 证明 $A\times B$ 与 $B\times A$ 之间存在一一对应.

1.4　关系、等价关系与商集

定义 1.4.1　(i) 设 A,B 是非空集合, $A\times B$ 的一个子集 R 叫做 $A\times B$ 上的一个 **(二元) 关系**.

(ii) 设 A 是非空集合, $A\times A$ 的一个子集 R 称为 A 中的一个 **(二元) 关系**.

作为一个例子, 若 $f: A \to B$ 是一个映射, 则 f 的**图像**是关系 $R = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$. 由于 f 是映射, 故 R 满足如下性质:

$$A \text{ 中每个元素 } a \text{ 恰好是 } R \text{ 中唯一一个有序对的第一分量.} \tag{1.2}$$

反过来, $A \times B$ 上任意关系 R 如果满足性质 (1.2), 它便决定唯一的函数 $f: A \to B$, 使 f 的图像是 R (这只要定义 $f(a) = b$ 即可, 其中 (a, b) 是 R 中第一分量为 a 的唯一的有序对). 基于此, 在集合论的形式公理化表达方式中, 习惯上将函数等同于它的图像, 即将函数定义成满足性质 (1.2) 的一个关系.

为了对某一集合中的元素有更多的认识, 人们常常对该集合的元素进行分类. 等价关系就是对集合的元素进行分类所采用的数学语言.

定义 1.4.2 设 $R \subseteq A \times A$ 是 A 中的一个二元关系. 为了符号上的方便, 我们将 $(a, b) \in R$ 写成 $a \sim b$. 若

(i) 对任意 $a \in A$, $a \sim a$ (**自反性**);

(ii) 对任意 $a, b \in A$, 若 $a \sim b$, 则 $b \sim a$ (**对称性**);

(iii) 对任意 $a, b, c \in A$, 若 $a \sim b$, $b \sim c$, 则 $a \sim c$ (**传递性**),

则称 R (或 $\sim$) 是 A 中的一个**等价关系**.

下面设 $R \subseteq A \times A$ 是 A 中的一个等价关系. 对 $a, b \in A$, 记 $a \sim b$ 当且仅当 $(a, b) \in R$.

定义 1.4.3 对任意 $a \in A$, 称集合

$$\overline{a} = \{b \in A \mid a \sim b\}$$

为 A 在等价关系 R 下的一个**等价类**, a 称为该等价类的一个**代表元**.

引理 1.4.1 设 $\sim$ 是集合 A 中的一个等价关系. 对任意 $a, b \in A$, 下面两种情况有且仅有一种成立: (i) $\overline{a} \cap \overline{b} = \varnothing$; (ii) $\overline{a} = \overline{b}$.

该引理可由等价关系的定义直接证明, 在此省略.

定义 1.4.4 (i) 令

$$A/\sim = \{\overline{a} \mid a \in A\},$$

即 A 在等价关系 R 下的所有等价类全体, 称为 A 关于该等价关系的**商集**. (注意每个等价类在 $A/\sim$ 中只出现一次. 对不同的 $a, b \in A$, 若 $a \sim b$, 则 $\overline{a} = \overline{b}$ 为 $A/\sim$ 中同一元素.)

(ii) 称映射

$$\pi: A \to A/\sim, \quad \pi(a) = \overline{a}$$

为 A 关于等价关系 $\sim$ 的**自然映射**.

注 1.4.1　一个等价类有“双重身份”, 它既是 A 的一个子集, 又是商集 $A/\sim$ 中的一个元素.

例 1.4.1 (整数模 n 的同余关系)　设 n 是某固定的正整数. 对于 $a, b \in \mathbb{Z}$, 定义 $a \sim b$ 当且仅当 n 整除 $a-b$, 即存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $a-b=kn$. 此时也写作 $a \equiv b \pmod n$. 可直接验证 $\sim$ 定义了 $\mathbb{Z}$ 上一个等价关系. 相应的集合 $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 为 $R=\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod n\}$. 在这个等价关系下, $\mathbb{Z}$ 有 n 个不同的等价类, 其商集 $\mathbb{Z}/\sim$ 即为模 n 的同余类集, 通常也记作

$$\mathbb{Z}_n=\{\bar{i} \mid i=0,1,\cdots,n-1\}, \quad 其中 \quad \bar{i}=\{i+kn \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

并且 $\mathbb{Z}=\bigcup\limits_{i=0}^{n-1} \bar{i}$. 相应的自然映射为

$$\pi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n, \quad i \mapsto \bar{i}.$$

定义 1.4.5　如果集合 A 有一族非空子集 $A_i\ (i \in I)$, 满足

(i) $A=\bigcup\limits_{i \in I} A_i$;

(ii) 若 $i, j \in I$ 且 $i \neq j$, 则 $A_i \cap A_j=\varnothing$,

那么称 $\{A_i \mid i \in I\}$ 构成 A 的一个划分.

等价关系理论的一个主要结果是下述定理.

定理 1.4.1　(i) 设 $\sim$ 是非空集合 A 中的一个等价关系, 则 A 关于 $\sim$ 的等价类全体构成 A 的一个划分;

(ii) 若 $\{A_i \mid i \in I\}$ 是非空集合 A 的一个划分, 则存在唯一的 A 中的等价关系 $\sim$, 其所有的等价类刚好是 $\{A_i \mid i \in I\}$.

证明　(i) 令 $A/\sim=\{\bar{a} \mid a \in A\}$ 为 A 关于该等价关系的商集. 每个等价类在 $A/\sim$ 中只出现一次, 我们对每个等价类选取一个代表元, 所有这些代表元组成 A 的一个子集 $\{a_i \mid i \in I\}$, 则 $A/\sim=\{\overline{a_i} \mid i \in I\}$, 且对互异的 $i, j \in I$, $\overline{a_i} \neq \overline{a_j}$, 于是由引理 1.4.1 可知此时 $\overline{a_i} \cap \overline{a_j}=\varnothing$. 因为任意 $a \in A$ 都会出现在某个等价类 $\overline{a_i}$ 中, 所以

$$A=\bigcup_{i \in I} \overline{a_i}$$

是个无交并. 于是 $A/\sim$ 中的所有等价类构成 A 的一个划分.

(ii) 对任意 $a, b \in A$, 定义 $a \sim b$ 当且仅当存在 $i \in I$ 使得 $a, b \in A_i$, 则可直接验证 $\sim$ 定义了 A 上的一个等价关系, 且 A 关于 $\sim$ 的商集 $A/\sim=\{A_i \mid i \in I\}$.　□

下面是几个等价关系的例子. 请自行写出相应的商集和自然映射.

例 1.4.2 (三角形之间的相似关系)　令 A 为所有三角形组成的集合, 对任意两个三角形 $a, b \in A$, $a \sim b$ 当且仅当 a 与 b 相似.

例 1.4.3 (由映射决定的等价关系) 设 $f: X \to Y$ 为一个映射, 则集合 X 上有如下等价关系: 对任意 $a, b \in X$, $a \sim b$ 当且仅当 $f(a) = f(b)$.

除了等价关系, 以后还会遇到其他类型的关系, 如偏序关系等 (见后).

习题 1.4

1. 证明下面的例子中所定义的关系是等价关系, 并写出其商集及自然映射:

(i) 集合 A 为某班的所有学生, 对任意两个学生 $a, b \in A$(两个学生可以相同), $a \sim b$ 当且仅当 a 与 b 同性别;

(ii) $A = \mathbb{R}^2$, 对任意 $a, b \in \mathbb{R}^2$, $a \sim b$ 当且仅当 a 与 b 到原点的距离相等;

(iii) $A = \mathbb{C}$, 对任意 $a, b \in \mathbb{C}$, $a \sim b$ 当且仅当 $a = b$ 或 $a = \bar{b}$.

2. 在实平面 $\mathbb{R}^2$ 上定义 $(x, y) \sim (x', y')$, 如果 $xy = x'y'$. 证明 $\sim$ 是等价关系, 并指出其等价类.

3. 在实平面 $\mathbb{R}^2$ 上定义 $(x, y) \sim (x', y')$, 如果 $x - x' \in \mathbb{Z}$ 且 $y - y' \in \mathbb{Z}$. 证明 $\sim$ 是等价关系, 且商集 $\mathbb{R}^2/\sim$ 可以几何地表示为环面.

4. 在 $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ 上定义 $P \sim P'$, 如果点 O, P, P' 共线, 其中 O 是原点. 证明 $\sim$ 是 $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ 上的等价关系, 并确定其等价类 (商集 $(\mathbb{R}^3 \setminus \{O\})/\sim$ 称为**射影平面**).

5. 设 $B \subseteq A$ 为集合. 在 2^A 上定义 $X \sim Y$, 如果 $X \cap B = Y \cap B$. 证明这是一个等价关系, 并构造一个 $2^A/\sim$ 到 2^B 的双射.

6. 对自然数集 $\mathbb{N}$, 定义 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上的一个关系 "$\sim$":

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ 当且仅当} a + d = b + c,$$

证明这是个等价关系.

1.5 偏序、Zorn 引理与归纳法

如果 $I \neq \varnothing$, 而 $\{A_i \mid i \in I\}$ 是一个集族, 使得对每个 $i \in I$ 有 $A_i \neq \varnothing$, 我们希望知道是否 $\prod\limits_{i \in I} A_i \neq \varnothing$. 然而可以证明, 这个看似很自然的结论是不能由集合论通常的一些公理推导出来的. 所以我们假定有如下公理:

选择公理 由一些非空集合所构成的集族, 如果其下标集合是非空的, 那么它们的积集合也是非空的.

选择公理的另一形式见习题 1.5 第 4 题. 还有两个命题等价于选择公理, 它们在证明许多重要定理时起着关键性的作用. 为了叙述这两个等价的命题, 我们还需要引进另

一些概念.

所谓**偏序集**是一个非空集合 A 以及 A 中的一个二元关系 R (这个关系称为集合 A 上的**偏序**), 并且 R 满足**自反性**、**传递性** (见定义 1.4.2) 以及

反对称性　若 $(a,b)\in R$ 且 $(b,a)\in R$, 则 $a=b$.

如果 R 是 A 上的偏序, 我们通常将 $(a,b)\in R$ 记成 $a\leqslant b$. 用这一符号, 我们可以将偏序集表达为: 对所有 $a,b,c\in A$,

自反性　$a\leqslant a$;

传递性　$a\leqslant b,\, b\leqslant c\Rightarrow a\leqslant c$;

反对称性　$a\leqslant b,\, b\leqslant a\Rightarrow a=b$.

若 $a\leqslant b$ 且 $a\neq b$, 则记为 $a<b$. 元素 $a,\, b\in A$ 叫做**可比较的**, 如果 $a\leqslant b$ 或者 $b\leqslant a$. 但是在偏序集中两个给定的元素不一定是可比较的. 对于集合 A 的一个偏序, 如果任意两个元素均可比较, 我们便称它是**全序** (也叫做**线性序**或**简单序**).

例 1.5.1　设 A 是集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 的幂集. 对 $C,D\in A$, 定义 $C\leqslant D$, 如果 $C\subseteq D$, 则 "$\leqslant$" 是 A 上的偏序, 但不是全序 (例如 $\{1,2\}$ 和 $\{3,4\}$ 便不可比较).

假设 $(A,\leqslant)$ 是一个偏序集. 元素 $a\in A$ 称为 A 中的一个**极大元**, 是指对于每个 $c\in A$, 若 c 与 a 可比较, 则必有 $c\leqslant a$. 换句话说, 即对于每个 $c\in A$, $a\leqslant c\Rightarrow a=c$. 注意极大元 a 未必对**每个**$c\in A$ 均有 $c\leqslant a$ (即可能存在 $c\in A$ 与 a 不可比较). 此外一个给定的偏序集可能有许多极大元, 也可能没有极大元 (如 $\mathbb{Z}$ 对于通常的序). A 的非空子集 B 的**上界**是指元素 $d\in A$, 使得对每个 $b\in B$ 均有 $b\leqslant d$. 若 A 的一个非空子集 B 关于 $\leqslant$ 为全序集, 则称 B 是 A 中的一个**链**.

极大原理 (或称 **Zorn (佐恩) 引理**)　假设 A 是非空偏序集. 若 A 中每个链均有上界, 则 A 必含极大元.

由集合论可以证明, Zorn 引理等价于选择公理. Zorn 引理是非常有用的工具, 我们今后经常会用到它.

假设 B 是偏序集 $(A,\leqslant)$ 的非空子集. 元素 $c\in B$ 叫做 B 的**最小元**, 如果对于**每个**$b\in B$, 均有 $c\leqslant b$. 若 A 的每个非空子集均有最小元, 则称 A 为**良序集**. 每个良序集都是全序集 (但反之则不然), 这是因为对任意 $a,b\in A$, 子集 $\{a,b\}$ 必有最小元, 那么或者 $a\leqslant b$, 或者 $b\leqslant a$. 可以证明, 下面的命题与选择公理也是等价的.

良序原理　若 A 是非空集合, 则存在 A 中的一个全序 $\leqslant$, 使 $(A,\leqslant)$ 为良序集.

例 1.5.2　显然, 自然数集 $\mathbb{N}$ 关于通常的序是良序集. 整数集 $\mathbb{Z}$ 对于通常的序是全序集, 但**不是**良序集 (例如负整数构成的子集不存在最小元). 但是下面几个 $\mathbb{Z}$ 上的全序 (其中 $a<b\Leftrightarrow a$ 在 b 之左) 都是 $\mathbb{Z}$ 上的良序:

(i) $0,1,-1,2,-2,3,-3,\cdots,n,-n,\cdots$;

(ii) $0,1,3,5,7,\cdots,2,4,6,8,\cdots,-1,-2,-3,-4,\cdots$;

(iii) $0,3,4,5,6,\cdots,-1,-2,-3,-4,\cdots,1,2$.

这些序彼此是很不相同的. 序 (i) 中每个非零元素 a 都有**直接先导** (即元素 c, 使得 a 是子集 $\{x \mid c < x\}$ 的最小元). 但是序 (ii) 中的 2 和 -1 与序 (iii) 中的 -1 和 1 均没有直接先导. 另一方面, 序 (i) 和 (ii) 中没有极大元, 而序 (iii) 中 2 为极大元. 在所有三种序中, 0 均为整个全序集的最小元.

良序原理的意义在于可以将对于正整数的数学归纳法推广到任意良序集上, 即有

定理 1.5.1 (超限归纳法) *若 B 是良序集 $(A, \leqslant)$ 的子集, 且对于每个 $a \in A$ 均有*

$$\{c \in A \mid c < a\} \subseteq B \quad \Rightarrow \quad a \in B,$$

则 $B = A$.

证明 若 $A \backslash B \neq \varnothing$, 则存在 $A \backslash B$ 的最小元 a. 由最小元和 $A \backslash B$ 的定义可知 $\{c \in A \mid c < a\} \subseteq B$. 再由假设推出 $a \in B$, 从而 $a \in B \cap (A - B) = \varnothing$, 矛盾. 因此 $A \backslash B = \varnothing$, 从而 $A = B$. □

习题 1.5

1. 假设 $(A, \leqslant)$ 为偏序集合, B 为 A 的非空子集. B 的**下界**是元素 $d \in A$, 使得对于每个 $b \in B$ 均有 $d \leqslant b$; B 的**下端**是 B 的一个下界 d_0, 使得对于 B 的任何一个下界 d 均有 $d \leqslant d_0$. 类似地, B 的**上界**是元素 $t \in A$, 使得对每个 $b \in B$ 均有 $b \leqslant t$; B 的**上端**是 B 的一个上界 t_0, 使得对于 B 的任何一个上界 t 均有 $t_0 \leqslant t$. 称 $(A, \leqslant)$ 是**格**, 如果对任意 $a, b \in A$, 集合 $\{a, b\}$ 均有上端和下端.

(i) 证明: 若 $S \neq \varnothing$, 则幂集 $P(S)$ 对于集合的包含序是格, 且有唯一的极大元.

(ii) 给出不是格的偏序集的例子.

(iii) 给出没有极大元的格和具有两个极大元的偏序集的例子.

2. 格 $(A, \leqslant)$ 叫做**完备**的, 如果 A 的每个非空子集均有下端和上端. 偏序集之间的映射 $f : A \to B$ 叫做**保序**的, 如果在 A 中 $a \leqslant a' \Rightarrow$ 在 B 中 $f(a) \leqslant f(a')$. 求证完备格 A 到自身的保序映射 f 必有不动元 (即必有 $a \in A$ 使得 $f(a) = a$).

3. 给出有理数集 $\mathbb{Q}$ 的一个良序.

4. 设 S 是一个集合. S 的一个**选择函数**是从 S 的所有非空子集构成的集合到 S 的一个函数 f, 使得对每个 $A \subseteq S$, $A \neq \varnothing$ 均有 $f(A) \in A$. 求证选择公理等价于每个集合 S 均存在选择函数.

5. 设 $S = \{平面上的点(x, y) \mid y \leqslant 0\}$. 定义关系 $(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ 并且 $y_1 \leqslant y_2$. 求证这是 S 的偏序, 并且 S 有无穷多个极大元.

6. 求证: 若 $I \neq \varnothing$ 且集族 $\{A_i \mid i \in I\}$ 中每个集合 A_i 均非空, 则每个投影 $\pi_j : \prod\limits_{i \in I} A_i \to A_j$ 都是满射.

7. 设 $(A, \leqslant)$ 是全序集, $a \in A$ 的**直接后继** (如果存在的话) 是集合 $\{x \in A \mid a < x\}$ 中的最小元. 求证: 若 $\leqslant$ 是 A 上的良序, 则 A 中至多有一个元素没有直接后继. 给出全序集的例子, 使其恰好有两个元素没有直接后继.

1.6　集合的势

两个集合 A 和 B 叫做**等势**的, 如果存在一个双射 $A \to B$. 此时我们记成 $A \sim B$.

定理 1.6.1　*等势是全体集合构成的集族上的一个等价关系.*

这个结论的证明作为练习请读者自行完成.

假设 $I_0 = \varnothing$, 并且对于每个正整数 n, 令 $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$. 不难证明, I_n 和 I_m 等势当且仅当 $m = n$. 若集合 A 和 I_n 等势, 则 A 中恰好有 n 个元素. 所有这样的集合 A (即对某个唯一的自然数 n 有 $A \sim I_n$) 叫做**有限集**; 不是有限集的集合叫做**无限集**.

定义 1.6.1　*称集合 A 对于等势关系的等价类为 A 的***势***, 表示成 $|A|$. 当 A 为有限集或无限集时, 分别称 $|A|$ 为***有限势***或***无限势***.*

通常把势用 α, β, γ 等小写希腊字母表示. 我们可以把自然数 n **等同**于势 $|I_n|$, 即表示为 $|I_n| = n$, 从而有限集的势恰好是该集合中的元素个数. 不论势的具体情况如何, 由定理 1.6.1 和定义 1.6.1 及上述的讨论, 可见势均具有下列性质:

(i) 每个集合都有唯一的势;

(ii) 两个集合有同样的势, 当且仅当它们是等势的 (即: $|A| = |B| \Leftrightarrow A \sim B$);

(iii) 有限集合的势是该集合中的元素个数.

因此关于势的命题等价于关于集合等势性的命题.

例 1.6.1　自然数集 $\mathbb{N}$ 的势习惯上表示为 $\aleph_0$(读作 "阿列夫零"). 势为 $\aleph_0$ 的集合 (即与 $\mathbb{N}$ 等势的集合) 叫做**可数**集. 整数集 $\mathbb{Z}$ 和有理数集 $\mathbb{Q}$ 均为可数集, 但实数集 $\mathbb{R}$ 不是可数的. 将 $\mathbb{R}$ 的势习惯上表示为 $\aleph$(读作 "阿列夫"), 即 $|\mathbb{R}| = \aleph$.

定义 1.6.2　*假设 α 和 β 为势, 集合 A 和 B 不相交, 且 $|A| = \alpha$, $|B| = \beta$, 则***和***$\alpha + \beta$ 定义为势 $|A \cup B|$,* **积***$\alpha\beta$ 定义为势 $|A \times B|$.*

在定义积 $\alpha\beta$ 的时候, 实际上不必假定 A 和 B 不相交. 从势 α 的定义可知, 存在集合 A, 使得 $|A| = \alpha$. 不难证明, 定义 $\alpha + \beta$ 时所需要的不相交集合总是存在的, 并且和 $\alpha + \beta$ 以及积 $\alpha\beta$ 均与集合 A 和 B 的选取方式无关. 势的加法和乘法满足结合律和交换律, 并且分配律也成立. 此外, 有限势的加法和乘法与它们所等同的自然数之间的加法和乘法是一致的. 这是因为, 若 A 和 B 分别有 m 和 n 个元素, 并且 $A \cap B = \varnothing$, 则 $A \cup B$ 有 $m + n$ 个元素, 而 $A \times B$ 有 mn 个元素.

定义 1.6.3　*假设 α 和 β 为势, A 和 B 为集合, 且 $|A| = \alpha$, $|B| = \beta$. 若 A 与 B*

的一个子集等势 (即存在一个单射 $A \to B$), 则称 α **小于或等于** β (表示成 $\alpha \leqslant \beta$ 或者 $\beta \geqslant \alpha$). 若 $\alpha \leqslant \beta$ 且 $\alpha \neq \beta$, 则称 α **严格小于** β(表示成 $\alpha < \beta$ 或者 $\beta > \alpha$).

不难验证, $\leqslant$ 的定义与集合 A 和 B 的选取方式无关. 可以证明, 在所有的势上, $\leqslant$ 定义了一个全序. 对于有限势, $\leqslant$ 与自然数通常的序关系是一致的 (见本节习题第 1 题). 从下面的定理可以知道, 最大的势是不存在的.

定理 1.6.2 若 A 是集合而 $P(A)$ 是其幂集, 则 $|A| < |P(A)|$.

证明 映射 $\pi: A \to P(A), a \mapsto \{a\}$ 是一个单射, 从而 $|A| \leqslant |P(A)|$.

若 $|A| = |P(A)|$, 则存在一个双射 $f: A \to P(A)$. 定义集合 $B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \in P(A)$. 因为 f 是满射, 故存在某个 $a_0 \in A$, 使得 $f(a_0) = B$. 若 $a_0 \in B$, 则由 B 的定义, $a_0 \notin f(a_0) = B$, 矛盾; 若 $a_0 \notin B = f(a_0)$, 则由 B 的定义, $a_0 \in B$, 仍然矛盾. 这与 B 作为集合的元素确定性不符. 因此 $|A| < |P(A)|$. □

注 1.6.1 根据定理 1.6.2, $\aleph_0 = |\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})|$. 可以证明 $|P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| = \aleph$.

定理 1.6.3 (连续统假设) 不存在势 β, 使得 $\aleph_0 < \beta < \aleph$.

已经证明, 连续统假设与集合论中的选择公理和其他基本公理是彼此独立的. 最后我们不加证明地给出:

定理 1.6.4 (Schroeder-Bernstein (施罗德–伯恩斯坦)) 假设 A 和 B 是集合. 若 $|A| \leqslant |B|$ 且 $|B| \leqslant |A|$, 则 $|A| = |B|$.

习题 1.6

1. 对集合 I_n 证明如下结论, 其中 n 为自然数:

(i) I_n 与其任意真子集均不等势 (提示: 归纳法);

(ii) I_m 和 I_n 等势 $\Leftrightarrow m = n$;

(iii) I_m 与 I_n 的一个子集等势, 但 I_n 与 I_m 的任意子集均不等势 $\Leftrightarrow m < n$.

2. 求证: (i) 每个无限集均与其某个真子集等势.

(ii) 集合 A 有限的充要条件是 A 与 A 的任意真子集均不等势 (见第 1 题).

3. 若 A, A', B, B' 是集合且 $|A| = |A'|$, $|B| = |B'|$, 则 $|A \times B| = |A' \times B'|$. 此外若又有 $|A \cap B| = 0 = |A' \cap B'|$, 则 $|A \cup B| = |A' \cup B'|$. 从而可以定义势的加法和乘法.

4. 对有限集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 证明

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \cdots +$$
$$(-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + \cdots +$$

$$(-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

5. (i) 对正整数 n, 定义 Euler (欧拉) 函数 $\varphi(n)$ 为不超过 n 且与 n 互素的正整数的个数. 证明

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right),$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_r$ 是 n 的所有不同的素因子;

(ii) 作为推论, 证明: 若正整数 m, n 互素, 则 $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.