

第一章

曲线和曲面的 局部理论

1.1 正则曲线及其弧长参数化

1.1.1 正则曲线

我们将空间曲线理解为从一个区间到 \mathbb{R}^3 的光滑映射.

定义 1.1 一条参数曲线指的是一个光滑映射 $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, 其中 $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

注 1.1 γ 称为是光滑的, 是指如果用分量来表示 $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, 那么其分量函数

$$x, y, z : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

都任意次可微. $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ 称为 γ 在 t 处的切向量.

参数曲线的定义是依照运动学的角度提出的, 我们可以将 t 理解为时间, $\gamma(t)$ 就是 t 时刻物体所处的位置, 此时 $\gamma'(t)$ 是物体在 t 时刻的瞬时速度. 然而, 在几何学中, 我们可能更常将曲线理解为 \mathbb{R}^3 中的一个子集. 因此, 当谈及一条曲线时, 我们实际上可能说的是参数曲线 γ 的像 $\gamma((a, b))$. 注意到对任意的参数曲线, γ 的像可能并非一条真正的曲线. 例如当 γ 是常向量时, 这表示一个处于静止状态的物体的运动轨迹, 所以其像只是一个点而非真正的曲线. 又例如考虑如下平面参数曲线 (作为空间参数曲线的特例):

$$\gamma(t) = (t^3, t^2), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

我们观察到 $\gamma(\mathbb{R}) = \{(x, y) | x^2 = y^3\}$, 这看上去并非一条“光滑”的曲线. 我们并没有定义何谓光滑的曲线 (作为 \mathbb{R}^3 的子集), 但是能够找到一个直观的证据: 在 $(0, 0)$ 附近 $\{(x, y) | x^2 = y^3\}$ 无法写成一个光滑函数的图像. 因此 (1.1) 这类参数曲线也应该排除 (在它包含 $t = 0$ 时). 为直观理解作为参数曲线是光滑的, 但其像不“光滑”的原因, 我们可以考虑以 (1.1) 式为轨迹的运动物体, 它运动方向出现“突变”的原因是在 $t = 0$ 时其运动的瞬时速度 $\gamma'(0)$ 降为零. 为了排除这种情况, 我们引入正则参数曲线的定义.

定义 1.2 一条正则参数曲线指的是一个光滑映射 $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, 其中 $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, 且对任意 $t \in (a, b)$, $\gamma'(t) \neq 0$.

下面的性质保证了正则参数曲线的像 (至少局部上) 确实是一条“光滑”的曲线.

命题 1.1 设 γ 是参数曲线且 $\gamma'(t_0) \neq 0$, 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\gamma((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)) \subseteq \mathbb{R}^3$ 可写成从某一开区间到 \mathbb{R}^2 的光滑映射的图像, 其中可能的形式是如下三种: $y = y(x), z = z(x); z = z(y), x = x(y); x = x(z), y = y(z)$.

习题 1.1 命题 1.1 是隐函数定理的直接推论, 试给出证明细节.

这个命题的证明过程还保证了正则参数曲线局部上是一个单射, 这对于局部理论的研究是足够的. 因此, 我们并不排除 γ 本身不是单射 (即曲线有自交) 的情形.

从几何学的角度, 我们更关心作为 \mathbb{R}^3 的子集的几何性质, 也就是说更关心物体运动的轨迹而并非沿着这个轨迹运动的物体的具体运动过程. 因此, 如果两条正则参数曲线具有相同的像, 我们认为它们几何上是“一样”的, 这样的两条正则参数曲线 (至少在局部上) 相差一个重新参数化.

定义 1.3 设 $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是一条正则参数曲线, $\varphi: (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ 是满足 φ' 处处不为零的光滑双射, 那么正则参数曲线 $\gamma \circ \varphi: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^3$ 称为 γ 的一个重新参数化.

显然, 重新参数化是一个等价关系, 并且所有相差一个重新参数化的正则参数曲线具有相同的像. 此后, 我们将正则参数曲线简称为正则曲线 (或直接简称为曲线), 同时也不会时刻强调参数曲线和它的像之间的区别.

1.1.2 弧长参数化

曲线的基本几何性质是弧长.

定义 1.4 给定参数曲线 $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, 我们定义其弧长参数

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(t')| dt',$$

其中 $t_0 \in (a, b)$, $|\gamma'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$.

由数学分析的知识, 我们知道 $s(t)$ 的绝对值表示曲线从 t_0 到 t 一段的弧长, 因此应当在重新参数化下不变. 事实上, 我们可以根据定义直接验证此事. 我们选取重新参数化 $\varphi: (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ 使得 φ' 处处为正. 为表明弧长参数与曲线的参数化无关, 只需证明下式对任意 $u_0, u \in (\alpha, \beta)$ 成立:

$$\int_{\varphi(u_0)}^{\varphi(u)} |\gamma'(t')| dt' = \int_{u_0}^u |(\gamma \circ \varphi)'(u')| du'. \quad (1.2)$$

事实上, 根据链式法则和积分换元 $t = \varphi(u)$,

$$\int_{u_0}^u |(\gamma \circ \varphi)'(u')| du' = \int_{u_0}^u |\gamma'(\varphi(u'))| |\varphi'(u')| du' = \int_{t_0=\varphi(u_0)}^{t=\varphi(u)} |\gamma'(t)| dt.$$

当然弧长参数化之间可以相差一个常数, 这取决于所选定的积分起点. 如果 φ' 处处为负, 那么 (1.2) 式将会多出一个负号. 这表明弧长参数“并非完全”与参数化的选取无关. 上面的论证表明, 对那些相互之间的转换函数 φ 具有正导数的参数化, 弧长参数是一致的; 而若 φ 具有负导数, 则弧长参数相差一个负号. 于是, 我们可以将曲线的所有参数化这个等价关系分成两类, 每一类中的参数化之间的转换函数具有正的导数. 这两

类等价关系称为正则曲线的两种定向. 直观上这是显然的: 例如我们选定参数曲线上的像上的两点 p, q , 定向指的是计算弧长时, 究竟是从 p 算到 q , 还是从 q 算到 p . 当然, 当我们给定一条正则曲线时, 指的是一条正则参数曲线, 这个参数化就给出了曲线的一个定向 (见图 1.1).

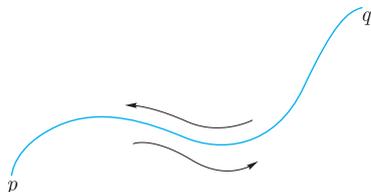


图 1.1 曲线定向

如果一条正则曲线 γ 的参数 t 恰好是其弧长参数 (相差一个常数), 即

$$t - s(t) = t - \int_{t_0}^t |\gamma'(t')| dt' \equiv \text{常数},$$

那么我们称 γ 是弧长参数化的. 上式等价于其两边求导后的结果:

$$|\gamma'(t)| = 1, \quad t \in (a, b),$$

这说的是参数曲线的切向量恒为单位向量. 这是一个更容易应用的条件. 为此, 我们引入如下定义:

定义 1.5 正则参数曲线 $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ 称为是弧长参数化的, 是指 $|\gamma'(s)| = 1, s \in (a, b)$.

对于弧长参数, 我们习惯用 s 而非 t 来表示.

下面我们给定正则曲线 $\gamma = \gamma(t)$, 总存在弧长参数, 并且约定 s 是其弧长参数. 事实上, 直观地讲, 若把曲线看成一条运动的轨迹, 参数 t 表示时间, 则 $|\gamma'(t)|$ 表示运动的速度, 那么存在弧长参数, 也就是存在单位速度的匀速运动, 它有相同的运动轨迹. 严格的数学证明如下: 注意到

$$s'(t) = |\gamma'(t)| > 0, \quad t \in (a, b),$$

因此函数 $s = s(t)$ 有光滑的反函数. 如果我们将这个反函数记作 $t = t(s)$, 那么 $\gamma \circ t$ 是 γ 的重新参数化, 并且通过直接计算

$$(\gamma \circ t)'(s) = \gamma'(t)t'(s) = \gamma'(t) \cdot \frac{1}{s'(t)},$$

得知 $\gamma \circ t$ 的切向量是单位长的, 于是是弧长参数化的. 这表明任意正则曲线都可以选取其弧长参数化, 我们称这个过程为曲线的弧长重参数化. 由于弧长参数不依赖于曲线的同定向间参数化的选取, 是“几何的”参数, 因此我们将会挑选弧长参数化作为参数化的代表. 下面将总是假设曲线是弧长参数化的. 这将会有助于分析曲线的几何性质.

1.2 曲线的曲率和挠率

1.2.1 曲率

给定一条弧长参数化的参数曲线 $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, 我们首先引入曲率的定义.

定义 1.6 给定 $s \in (a, b)$. $\kappa(s) := |\gamma''(s)|$ 称为曲线 γ 在 s 处的曲率.

从定义看, 由于 $\gamma'(s)$ 具有单位长, 因此代表着曲线 (这里曲线指代参数曲线的像, 即 \mathbb{R}^3 中的子集) 的切方向. 那么曲率就可以理解为曲线的切方向的变化.

注 1.2 曲率不依赖于曲线的定向. 这是因为如果取 γ 的另一定向对应的参数化 $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(-s)$, 那么显然有 $\tilde{\gamma}''(s) = \gamma''(-s)$, 因此在对应的点具有相同的曲率.

注 1.3 曲线的曲率不因曲线放置在 \mathbb{R}^3 中的方式而改变, 即刚体变换不改变曲率. 准确地说, 如果 O 是 \mathbb{R}^3 中的正交变换, $p \in \mathbb{R}^3$, 那么 γ 与 $O \circ \gamma + p$ (由 O 是正交变换, 可知仍然是弧长参数化的) 有相同的曲率. 这是因为

$$(O \circ \gamma(s) + p)'' = (O(\gamma'(s)))' = O(\gamma''(s)),$$

这与 $\gamma''(s)$ 有相同的长度.

下面的两个例子表明曲率某种程度上表现了曲线的弯曲.

例 1.1 直线的曲率为零. 这是因为任何直线都可以弧长参数化为 $\gamma(s) = vs + w$, 其中 $|v| = 1$. 此时 $\kappa(s) = |\gamma''(s)| = 0$. 反过来也是正确的: 曲率处处为零的曲线是直线. 这是因为 $\gamma''(s) \equiv 0$ 可推出 γ 是 s 的线性函数.

例 1.2 圆的曲率为常数, 且该常数为圆半径的倒数. 设圆的圆心是 p , 半径为 r , 标准正交向量 e_1, e_2 平行于该圆所在平面. 那么圆可弧长参数化为

$$\gamma(s) = p + r \left(e_1 \cos \frac{s}{r} + e_2 \sin \frac{s}{r} \right), \quad s \in \mathbb{R}.$$

直接计算可知 $\gamma''(s) = -\frac{1}{r} \left(e_1 \cos \frac{s}{r} + e_2 \sin \frac{s}{r} \right)$, 因此 $|\gamma''(s)| \equiv \frac{1}{r}$. 与直线的情况不同的是, 曲线的曲率为 (非零) 常数并不表明该曲线一定是圆.

习题 1.2 (螺旋线) 考虑参数曲线

$$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

这称为螺旋线 (见图 1.2). 试给出其弧长参数化, 并证明螺旋线的曲率 $\kappa(s) \equiv \frac{a}{a^2 + b^2}$. 这暗示我们曲线应该有除了曲率以外的其他几何信息.

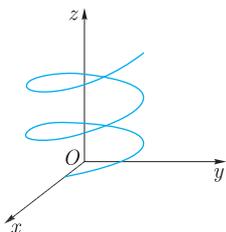


图 1.2 螺旋线

习题 1.3 计算曲率时将参数曲线进行弧长参数化并非每一次都是好的选择, 因此得到一般参数下曲率的表达式是必要的. 对于一条一般的正则曲线 γ , 试通过将其弧长参数化, 证明其在 t 参数下曲率表达式为

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}.$$

其中 $v \wedge w$ 表示 \mathbb{R}^3 中向量 v 与 w 的外积. 试用此式重新计算螺旋线的曲率.

1.2.2 挠率

从螺旋线的例子可知曲率并非曲线所包含的所有几何信息. 而圆与螺旋线的一个区别是圆是平面曲线而螺旋线不是. 因此, 我们应该有一个几何量可以刻画一条曲线与作为平面曲线的偏离的程度, 并且对平面曲线而言, 这个几何量应该为零. 我们接下来定义的挠率将满足这个条件.

为定义曲线 γ 在一点 s 处的挠率, 我们必须首先假设在该点处 $\kappa(s) = |\gamma''(s)| \neq 0$. 这样我们就可以记

$$t(s) = \gamma'(s), \quad n(s) = \frac{\gamma''(s)}{\kappa(s)},$$

t 是曲线的切向量, n 称为曲线在 s 处的主法向量. 它们都具有单位长. 经过 $\gamma(s)$, 由 $t(s), n(s)$ 所张成的平面称为曲线在 s 处的密切平面. 我们称密切平面的单位法向量

$$b(s) = t(s) \wedge n(s)$$

为从法向量. $\{t(s), n(s), b(s)\}$ 是标准正交的且形成右手系. 我们将 $\{t(s), n(s), b(s)\}$ 称为 **Frenet (弗雷内) 标架**.

注 1.4 密切平面的得名源于以下事实: 给定 s_0 , 当 s 与 s_0 充分接近时, 在所有经过 $\gamma(s_0)$ 的平面中, 曲线上的点 $\gamma(s)$ 到密切平面的距离最短. 事实上, 我们取经过 $\gamma(s_0)$ 的一个平面 P , 且设其单位法向量为 μ . 那么 $\gamma(s)$ 到平面 P 的距离为 $|\langle \gamma(s) - \gamma(s_0), \mu \rangle|$, 其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 \mathbb{R}^3 中的标准内积. 将 $\gamma(s)$ 在 s_0 附近作 Taylor (泰勒) 展开, 可得

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + t(s_0)(s - s_0) + \frac{\kappa(s_0)n(s_0)}{2}(s - s_0)^2 + O((s - s_0)^3),$$

于是

$$\begin{aligned} & \langle \gamma(s) - \gamma(s_0), \mu \rangle \\ &= \langle t(s_0), \mu \rangle (s - s_0) + \left\langle \frac{\kappa(s_0)n(s_0)}{2}, \mu \right\rangle (s - s_0)^2 + O((s - s_0)^3). \end{aligned}$$

由此可知, 当且仅当 μ 同时与 $t(s_0), n(s_0)$ 正交, 即平行于 $b(s_0)$ 时, 也就是说 P 是密切平面时, $\gamma(s)$ 到平面 P 的距离取得最高可能的阶数 $O((s - s_0)^3)$.

习题 1.4 以下事实同样解释了密切平面的密切性, 试证明: 设弧长参数化的曲线 γ 在 s_0 处的曲率 $\kappa(s_0) \neq 0$. 那么任取曲线上相异三点 $\gamma(s_0), \gamma(s_0 + h), \gamma(s_0 + l)$, 过这三点的平面在 $h, l \rightarrow 0$ 时的极限位置恰是 γ 在 s_0 处的密切平面.

注 1.5 经过 $\gamma(s)$, 由 $t(s), b(s)$ 所张成的平面称为曲线在 s 处的**从切平面**, 由 $n(s), b(s)$ 所张成的平面称为曲线在 s 处的**法平面** (见图 1.3). 这两个概念我们暂时不会用到.

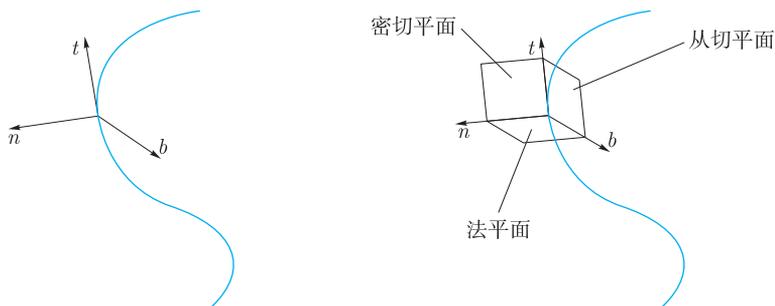


图 1.3 密切平面、从切平面和法平面

由于密切平面是在一点处最接近曲线的平面, 因此密切平面的变化 $|b'(s)|$ 应该能反映曲线与作为平面曲线的差异. 但是与曲率不同, 由于已经有一个标架 $\{t(s), n(s), b(s)\}$, 我们进一步将 $b'(s)$ 用该标架表示来寻找更准确的信息. 注意到 $b(s)$ 一直是单位长的, 于是

$$0 = \langle b(s), b(s) \rangle' = 2\langle b'(s), b(s) \rangle,$$

因此 $b'(s)$ 与 $b(s)$ 正交. 另一方面, 由于 $b(s) = t(s) \wedge n(s)$, 而 $t'(s) \wedge n(s) = \kappa(s)n(s) \wedge n(s) = 0$, 因此

$$b'(s) = t'(s) \wedge n(s) + t(s) \wedge n'(s) = t(s) \wedge n'(s),$$

特别地, $b'(s)$ 与 $t(s)$ 也正交. 这表明 $b'(s)$ 与 $n(s)$ 平行. 据此, 存在一个函数 $\tau(s)$ 使得

$b'(s) = -\tau(s)n(s)$, 我们就把 $\tau(s)$ 称为 γ 在 s 处的挠率. 等价地, 我们也可以把挠率表示为

$$\tau(s) = -\langle b'(s), n(s) \rangle.$$

注意到, 挠率是有符号的. 如果改变曲线的定向 (即 s 换成 $-s$), 那么此时 $n(s) = \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|}$ 的方向没有改变, 但由于 $t(s)$ 的方向改变, $b(s)$ 的方向也改变, 这使得 $b'(s)$ 不改变. 于是, 与曲率一样, 挠率 $\tau(s)$ 不因定向的变化而变化.

习题 1.5 试证明与曲率一样, 挠率同样不因曲线放置的方式而改变. 即如果 O 是 \mathbb{R}^3 中的正交变换, $p \in \mathbb{R}^3$, 那么 γ 与 $O \circ \gamma + p$ 有相同的挠率.

例 1.3 很容易验证 (曲率非零的) 平面曲线的挠率一定为零, 这是因为对平面曲线而言, $t(s), n(s)$ 对任意 s 都平行于同一平面从而该平面的法向量 $b(s)$ 不改变, 即挠率为零. 反过来也是正确的, 即如果曲线的挠率为零, 那么一定为平面曲线. 这是因为, 挠率为零意味着 $b'(s) \equiv 0$, 据此我们设 $b(s) \equiv b_0$, 计算

$$\langle \gamma(s), b_0 \rangle' = \langle \gamma'(s), b_0 \rangle = 0,$$

于是 $\gamma(s)$ 与 b_0 的内积为常数. 这表明 $\gamma(s)$ 落在与 b_0 正交的某一平面内.

习题 1.6 如同曲率的计算一样, 我们也希望得到在一般的参数化下挠率的计算公式. 试证明对一般的正则曲线 γ ,

$$\tau = \frac{\langle \gamma' \wedge \gamma'', \gamma''' \rangle}{|\gamma' \wedge \gamma''|^2}.$$

习题 1.7 试计算螺旋线 (1.3) 的挠率, 并阐述挠率的正负具有何种几何意义.

注 1.6 我们稍微进一步分析挠率定义中 $\kappa(s) \neq 0$ 的假设. 挠率的定义要求 $\kappa(s) \neq 0$, 是因为 $\kappa(s) \neq 0$ 才保证了 s 处密切平面的存在性, 而挠率反映了密切平面的变化. 让我们考虑一个极端的情形, 即 $\kappa(s) \equiv 0$ 的情形, 此时该曲线是直线. 我们可以看出, 直线虽然是平面曲线, 但是它是“哪个”平面上的曲线, 却是不固定的. 因此, 直线的“密切平面”可以是任意变化的. 由此可见, 我们无法对直线定义所谓挠率, 或者说无论如何定义挠率, 对直线而言都没有任何实际意义.

习题 1.8 针对只有一点的曲率为零的情况, 可考虑下面的例子. 考虑映射

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-\frac{1}{t^2}}), & t > 0, \\ (t, e^{-\frac{1}{t^2}}, 0), & t < 0, \\ (0, 0, 0), & t = 0, \end{cases}$$

试证明这是一条正则曲线, 并且仅仅在 $t = 0$ 时曲率 $\kappa(0) = 0$. 证明分别对 $t < 0, t > 0$, 曲线是平面曲线, 但对 $t \in \mathbb{R}$, 该曲线并非平面曲线.

1.3 Frenet-Serret 公式与曲线论基本定理

对一条正则曲线, 我们定义了曲率和挠率. 接下来的一个自然的问题是是否还有其他关于曲线的几何量. 根据这个问题, 我们很自然地会去计算 $n'(s)$. 然而, 这没有给出新的几何量. 这是因为, 根据 $n(s) = b(s) \wedge t(s)$, 我们有

$$\begin{aligned} n'(s) &= b'(s) \wedge t(s) + b(s) \wedge t'(s) \\ &= -\tau(s)n(s) \wedge t(s) + b(s) \wedge \kappa(s)n(s) \\ &= \tau(s)b(s) - \kappa(s)t(s). \end{aligned}$$

下面我们可以将 Frenet 标架 $\{t(s), n(s), b(s)\}$ 随曲线运动的方程整理到一起:

$$\begin{cases} t' = \kappa n, \\ n' = \tau b - \kappa t, \\ b' = -\tau n. \end{cases} \quad (1.4)$$

这称为 **Frenet-Serret (弗雷内-塞雷) 公式** (为简单起见, 我们隐去了参数 s). 因为 Frenet 标架张成整个 \mathbb{R}^3 , 所以曲线的所有几何量都应该反映到 Frenet 标架的运动中. 在 Frenet-Serret 公式中, 曲率 κ 、挠率 τ 就是系数中所有独立的分量. 因此, 我们期待曲率和挠率可以完全地刻画一条曲线. 此事实可以用如下定理进一步准确地阐述:

定理 1.1 (曲线论基本定理) 任意给定区间 $I = (a, b)$ 及定义在其上的光滑函数 $\kappa(s) > 0, \tau(s)$, 都存在一条弧长参数化的曲线 $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ 使得 $\kappa(s), \tau(s)$ 分别是曲线 γ 的曲率和挠率. 此外, 若曲线 α, β 满足上述所有条件, 则 α, β 相差一个刚体运动, 即存在一个正交变换 O 与 $p \in \mathbb{R}^3$ 使得 $\beta = O \circ \alpha + p$.

证明 我们首先证明唯一性部分. 下面假设两条弧长参数化的曲线 α, β 均以 κ, τ 为曲率、挠率. 设它们的 Frenet 标架分别是 $\{t_1, n_1, b_1\}$ 及 $\{t_2, n_2, b_2\}$. 选定一点 $s_0 \in I$, 取正交变换 O 及 $p \in \mathbb{R}^3$ 使得在 s_0 处的 $\{t_1, n_1, b_1\}$ 通过 O 映到 $\{t_2, n_2, b_2\}$ 且 $\beta(s_0) = O \circ \alpha(s_0) + p$. 下面我们断言对任意 $s \in I$, $\beta = O \circ \alpha + p$. 注意到 $\tilde{\alpha} := O \circ \alpha + p$ 同样是弧长参数化的曲线且根据注 1.3、习题 1.5, 可知 $\tilde{\alpha}$ 同样以 κ, τ 为曲率、挠率. 注意到 $\tilde{\alpha}(s_0) = \beta(s_0)$ 且在 s_0 处有相同的 Frenet 标架. 因此, 为简单起见, 我们可不妨假设 α, β 一开始就满足

$$\alpha(s_0) = \beta(s_0), \quad t_1(s_0) = t_2(s_0), \quad n_1(s_0) = n_2(s_0), \quad b_1(s_0) = b_2(s_0),$$

然后去证明 $\alpha = \beta$. 由于 α, β 均以 κ, τ 为曲率、挠率, 因此它们的 Frenet 标架满足相

同的方程:

$$\begin{cases} t'_1 = \kappa n_1, & t'_2 = \kappa n_2, \\ n'_1 = \tau b_1 - \kappa t_1, & n'_2 = \tau b_2 - \kappa t_2, \\ b'_1 = -\tau n_1, & b'_2 = -\tau n_2. \end{cases}$$

由于在 s_0 处取相同的值, 常微分方程理论保证了它们对任意 s 都是相同的. 事实上, 我们也可以直接诉诸如下初等的计算结果 (细节留作习题):

$$\left(|t_1 - t_2|^2 + |n_1 - n_2|^2 + |b_1 - b_2|^2 \right)' \equiv 0.$$

无论如何, 我们都特别地有 $\alpha'(s) = t_1(s) = t_2(s) = \beta'(s)$ 对任意 $s \in I$ 成立. 由于 $\alpha(s_0) = \beta(s_0)$, 我们就有 $\alpha = \beta$ 并完成了唯一性的证明.

存在性的部分则是求解 Frenet-Serret 公式 (1.4). 任意给定 $\kappa > 0, \tau$ 以及 $s_0 \in I$, 根据常微分方程的理论, 线性方程组 (1.4) 在任意给定初值 $\{t(s_0), n(s_0), b(s_0)\}$ (要求标准正交且成右手系) 后都存在 I 上的整体解 $\{t, n, b\}$. 此时我们断言

$$\gamma(s) = \int_0^s t(s') ds'$$

就是我们所求的曲线. 为此, 我们需要证明 γ 的曲率和挠率分别是 κ, τ . 这里的关键是要证明求解 (1.4) 得到的 $\{t, n, b\}$ 确实是 γ 的 Frenet 标架. 因此需要证明 $\{t, n, b\}$ 对任意 $s \in I$ 都是标准正交且成右手系的. 我们将 (1.4) 写成矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} & \kappa & \\ -\kappa & & \tau \\ & -\tau & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix} =: A \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}.$$

这里的关键点是 A 是反称矩阵. 下面我们将 t, n, b 都视作行向量并记列向量组 $t^T, n^T,$

b^T 是它们的转置, 并考虑矩阵 $Q = \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^T & n^T & b^T \end{pmatrix}$, 我们只需要说明对任意 $s \in I$,

Q 都是单位矩阵, 即可说明 $\{t, n, b\}$ 对任意 $s \in I$ 都是标准正交的. 此时 $\{t, n, b\}$ 也不可能从右手系连续变成左手系. 通过直接计算可知

$$Q' = \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} t^T & n^T & b^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^T & n^T & b^T \end{pmatrix}' = AQ + QA^T.$$

注意到 A 是反称矩阵, 于是单位矩阵是上述常微分方程的解. 根据常微分方程解的唯一性可知 Q 恒为单位矩阵.

由于 $\{t, n, b\}$ 是标准正交且成右手系的, 很容易看出 $\{t, n, b\}$ 就是 γ 的 Frenet 标架且 κ, τ 是曲率、挠率. 事实上, 由 $\gamma' = t$, 且 t 是单位长的, 可知 γ 是弧长参数化的, 且 t 是 Frenet 标架中的 t . 由 (1.4) 中 $t' = \kappa n$ 且 n 是单位长的, 可知 $|\gamma''| = |t'| = \kappa$, 于是 κ 确实是 γ 的曲率, 并且 n 是 Frenet 标架中的 n . 最后, 由于 $\{t, n, b\}$ 标准正交且成右手系, 我们有 $b = t \wedge n$, 这表明 b 是 Frenet 标架中的 b , 并且由 (1.4) 中 $b' = -\tau n$ 可知 τ 确实是 γ 的挠率. \square

1.4 正则曲面及其第一基本形式

1.4.1 正则曲面

接下来, 我们将研究空间中的曲面. 与曲线的情形稍有不同, 我们直接把曲面定义为 \mathbb{R}^3 中满足一定性质的子集.

定义 1.7 $S \subseteq \mathbb{R}^3$ 称为 \mathbb{R}^3 中的正则曲面 (或简称曲面), 是指对任意 $p \in S$, 都存在 p 在 \mathbb{R}^3 中的邻域 W , 使得 $S \cap W$ 是某一个定义在开集上的二元光滑函数的图像.

注 1.7 这个定义实际上是把正则曲面定义为 \mathbb{R}^3 中的 2 维光滑子流形, 更标准的定义可见第三章中的定义 3.1.

例 1.4 实际操作中, 我们最常研究以下两类曲面: 其一, S 整个就是某个光滑函数的图像, 它可以表示为 $z = z(x, y)$, $y = y(z, x)$ 或 $x = x(y, z)$ 的形式; 其二, S 是某个三元函数的正则值的原像. 更准确地, 设 $F: W \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是光滑函数, W 是 \mathbb{R}^3 中的开集, 设 $c \in F(W)$ 满足对任意 $p \in F^{-1}(c)$, $(F_x, F_y, F_z)(p) \neq 0$ (这样的 c 称为 F 的正则值), 那么 $F^{-1}(c)$ 是正则曲面. 这是数学分析中隐函数定理的标准应用.

而在具体的计算中, 我们还是需要引入参数化. 在局部性质的研究中, 我们并不会实质上用到定义 1.7. 类似于正则参数曲线, 我们引入正则参数曲面的概念 (见图 1.4).

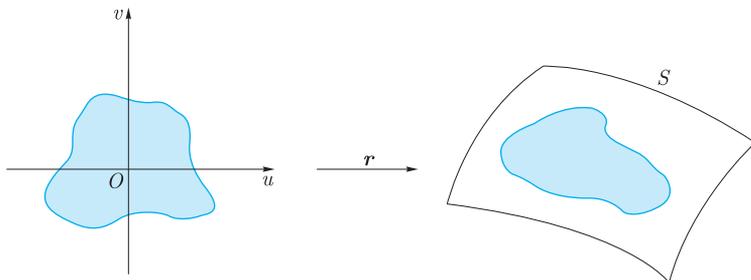


图 1.4 曲面参数化

定义 1.8 一张正则参数曲面, 指的是一个光滑映射 $\mathbf{r}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, 其中 U 是 \mathbb{R}^2 中的开集, 并且满足 $\mathbf{r}_u := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \mathbf{r}_v := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ 对任意 $(u, v) \in U$ 都线性无关, 即 $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \neq 0$.

与参数曲线的情形类似, 参数曲面与曲面的概念并非一致. 如果正则参数曲面 \mathbf{r} 是单射, 并且 $\mathbf{r}(U) \subseteq S$, 那么我们就称 \mathbf{r} 给出了 S 的一个参数化. 由于 $\mathbf{r}(U)$ 中的每一点都可以用唯一的一组 $(u, v) \in U$ 来标记, 我们也称 (u, v) 是 S 的一组局部坐标系. 我们很多时候都会将曲面上的点 p 以及它对应的坐标 (u, v) 等同而不加说明. 一张正则曲面由于局部上总是一个函数的图像, 例如 $z = f(x, y), (x, y) \in U$ 的图像, 那么

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in U$$

就给出了一个参数化. 下述习题表明反过来在局部意义下也是正确的:

习题 1.9 设 $\mathbf{r}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是正则参数曲面. 则对任意 $(u_0, v_0) \in U$, 都存在 (u_0, v_0) 的邻域 V , 使得 $\mathbf{r}(V)$ 是 \mathbb{R}^3 中的正则曲面.

证明同样是通过隐函数定理. 这里正则性条件 $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \neq 0$ 起到的作用同样是为了避免参数曲面的像看上去存在“不光滑”的点.

与曲线的情形类似, 如果 $\varphi: \tilde{U} \rightarrow U$ 是微分同胚, 那么 $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \circ \varphi: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 同样是正则参数曲面, 这时我们称 $\tilde{\mathbf{r}}$ 与 \mathbf{r} 相差一个重新参数化, φ 称为一个坐标变换. 我们认为相差一个重新参数化的参数曲面代表着相同的几何对象.

习题 1.10 任给正则曲面 S 的两个参数化 $\mathbf{r}: U \rightarrow S, \tilde{\mathbf{r}}: \tilde{U} \rightarrow S$, 定义 $\varphi = \tilde{\mathbf{r}}^{-1} \circ \mathbf{r}: W \rightarrow \tilde{W}$, 其中 $W = \mathbf{r}^{-1}(\mathbf{r}(U) \cap \tilde{\mathbf{r}}(\tilde{U})), \tilde{W} = \tilde{\mathbf{r}}^{-1}(\mathbf{r}(U) \cap \tilde{\mathbf{r}}(\tilde{U}))$. 证明 φ 是微分同胚, 从而是一个坐标变换. 因此任意两个参数化都 (在它们的公共区域) 相差一个重新参数化.

例 1.5 考虑单位球面 $S^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. 由于 1 是 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 的正则值 (留作习题), 因此 S^2 是 \mathbb{R}^3 中的正则曲面. 我们可以用球坐标系将其参数化:

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi), \quad \theta \in (0, 2\pi), \varphi \in (0, \pi).$$

请自行验证其处处满足正则性条件 $\mathbf{r}_\theta \wedge \mathbf{r}_\varphi \neq 0$. 请注意这个参数化不能覆盖整个球面. 通常来说我们做不到用一个参数化来覆盖一个正则曲面. 但我们总可以对曲面上每一点选取一个能够覆盖这一点的参数化, 这对研究局部性质已经足够.

习题 1.11 给定 $R > r > 0$, 考虑环面 $T^2 = \{(x, y, z) | (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$. 证明 T^2 是正则曲面并且具有如下参数化 (你要验证这是正则的):

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = ((R + r \sin \varphi) \cos \theta, (R + r \sin \varphi) \sin \theta, r \cos \varphi), \quad 0 < \theta, \varphi < 2\pi. \quad (1.5)$$

习题 1.12 (球极投影) 我们可以按如下方式定义单位球面 $S^2: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的一个参数化, 称为球极投影. 其方式是对于所有 S^2 上除了北极 $N = (0, 0, 1)$ 以外的点

$(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$, 对应到 $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, 使得 $N, (x, y, z), (u, v, 0)$ 三点共线. 我们定义

$$\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$$

为 $\mathbf{r}(u, v) = (x, y, z)$. 试给出 $\mathbf{r}(u, v)$ 的表达式并证明 $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \neq 0$. 这表明 \mathbf{r} 确实是一个参数化.

正如切方向的变化即为曲线的曲率, 曲面的“曲率”也应该体现为其切方向的变化. 为此, 我们引入曲面的切平面的概念.

定义 1.9 给定曲面 S 及其上一点 $p \in S$. 设 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ 是曲线上的曲线且 $\gamma(0) = p$. 那么 $v = \gamma'(0)$ 称为 S 在 p 处的一个切向量. S 在 p 处的切平面定义为全部切向量 v 的集合, 记为 $T_p S$.

下面的命题表明切平面确实是一个平面: \mathbb{R}^3 的一个 2 维的线性子空间, 且给出的切平面的一个计算方法.

命题 1.2 任意给定 S 在 p 附近的一个参数化 $\mathbf{r} : U \rightarrow S$, 且不妨设 $\mathbf{r}(0, 0) = p$. 那么 $T_p S$ 是由 $\mathbf{r}_u(0, 0), \mathbf{r}_v(0, 0)$ 张成的 2 维线性子空间 (见图 1.5).

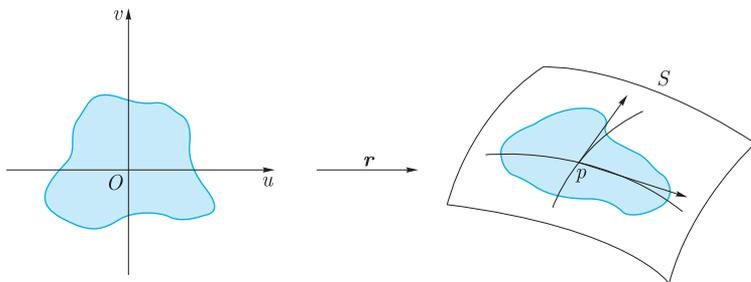


图 1.5 曲面切向

证明 任给 $v \in T_p S$, 取 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ 使得 $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. 设 γ 在参数化 \mathbf{r} 下的表示为 $(u(t), v(t))$, 即 $\gamma(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$, 由链式法则可知

$$v = \gamma'(0) = u'(0)\mathbf{r}_u(0, 0) + v'(0)\mathbf{r}_v(0, 0),$$

因此 $T_p S \subseteq \text{span}\{\mathbf{r}_u(0, 0), \mathbf{r}_v(0, 0)\}$. 反过来, 任取 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 考虑 $\gamma(t) = \mathbf{r}(\lambda t, \mu t)$, 则 $\gamma(0) = p$ 且 $\lambda\mathbf{r}_u(0, 0) + \mu\mathbf{r}_v(0, 0) = \gamma'(0) \in T_p S$. 这表明 $T_p S \supseteq \text{span}\{\mathbf{r}_u(0, 0), \mathbf{r}_v(0, 0)\}$. \square

注意到 $\mathbf{r}_u(0, 0)$ 是曲面 S 上的曲线 $\gamma_u(t) = \mathbf{r}(t, 0)$ 在 $t = 0$ 处的切向量, 同理 $\mathbf{r}_v(0, 0)$ 是曲线 $\gamma_v(t) = \mathbf{r}(0, t)$ 在 $t = 0$ 处的切向量, 两者均是曲面 S 在 p 处的切向量. 曲线 γ_u, γ_v 称为该参数化的坐标曲线. 上述命题指出曲面在一点处的切平面可由其坐标曲线的切向量张成, $\{\mathbf{r}_u(0, 0), \mathbf{r}_v(0, 0)\}$ 称为 $T_p S$ 的坐标基. 由于上述命题中的 p 可以换成 $\mathbf{r}(U)$ 中的任意一点, 于是切向量场 $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$ 给出了 $\mathbf{r}(U) \subseteq S$ 上任一点处的切平面的一个基.

下面我们选取微分同胚 $\varphi: \tilde{U} \rightarrow U$, 那么 $\tilde{\mathbf{r}} := \mathbf{r} \circ \varphi: \tilde{U} \rightarrow S$ 给出了 (p 附近的) 另一个参数化. 设 \tilde{U} 中的坐标为 (\tilde{u}, \tilde{v}) , 我们将 φ 用坐标写成

$$\varphi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})),$$

那么

$$\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \mathbf{r}(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})),$$

由链式法则可知

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{u}} &= \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \mathbf{r}_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \mathbf{r}_v, \\ \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}} &= \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \mathbf{r}_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \mathbf{r}_v.\end{aligned}\tag{1.6}$$

这给出了坐标变换下坐标基之间的变换关系, 两组基之间的过渡矩阵正好是由坐标变换 φ 的 Jacobi 矩阵给出.

1.4.2 第一基本形式

我们在研究曲线的几何性质时, 使用了弧长参数作为中间的桥梁. 弧长参数化至少会使得几何量的定义形式上变得更简单. 弧长参数是参数曲线的参数化中最有代表性的 (或者说, 典则的), 因为弧长是几何量. 于是, 在研究曲面时, 一个自然的问题是我们是否可以找到类似的具有代表性的参数化. 我们会看到, 在曲面的研究中 (维数大于 1), 此事并没有简单的答案. 于是, 在曲面论中, 我们将会发展对任意参数化都成立的理论 (曲线的对应物可见习题 1.3、习题 1.6).

然而, 曲面上弧长的概念仍然是重要的. 那么该如何量度曲面上曲线的弧长? 回忆一下对于任意的正则曲线 γ , t 是曲线的参数, 那么弧长参数由

$$s = \int |\gamma'(t)| dt$$

给出, 或者用弧长微元表示为

$$ds = |\gamma'(t)| dt.\tag{1.7}$$

下面任给正则曲面 S , 参数化 $\mathbf{r}: U \rightarrow S$ 以及其上一条正则曲线 $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbf{r}(U)$. 设 γ 在坐标系下的表示为 $(u(t), v(t))$, 即 $\gamma(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$, 我们有

$$s = \int |\gamma'(t)| dt = \int |u'(t)\mathbf{r}_u + v'(t)\mathbf{r}_v| dt = \int \sqrt{|u'(t)\mathbf{r}_u + v'(t)\mathbf{r}_v|^2} dt.$$

下面我们记

$$E = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle, \quad F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle, \quad G = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle,$$

那么

$$s = \int \sqrt{E(u'(t))^2 + 2Fu'(t)v'(t) + G(v'(t))^2} dt. \quad (1.8)$$

如果作如下代换: $du = u'(t)dt, dv = v'(t)dt$, 上式可以用弧长微元表示为

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \quad (1.9)$$

可注意对比此式与 (1.7) 式.

定义 1.10 我们称 ds^2 为曲面 S 的**第一基本形式**, E, F, G 称为是第一基本形式在参数化 \mathbf{r} (或坐标系 (u, v)) 下的**系数 (coefficient)**.

注 1.8 有一些读者可能不熟悉 ds^2 的具体含义, 此时只需把 (1.9) 式视作 (1.8) 式的无穷小版本的形式表达即可.

曲线弧长的无穷小版本就是曲线的切向量的长度. 因此我们也可以从切向量长度的计算方式出发定义第一基本形式. 任给 $p \in S$, 一些书中将 (在 p 处的) 第一基本形式定义为 $T_p S$ 上的一个二次型:

$$I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}, \\ w \mapsto |w|^2.$$

我们设 $w = w_1 \mathbf{r}_u + w_2 \mathbf{r}_v$, 通过类似 (1.8) 式的计算可知

$$I_p(w) = |w|^2 = E(w_1)^2 + 2Fw_1w_2 + G(w_2)^2 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

第二个等号右边对应于 (1.9) 式的右边, 最后一个等号表明 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ 是第一基本形式在基 $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$ 下的矩阵. ds^2 也可理解为对应于上述二次型 I_p 的双线性型:

$$ds_p^2 : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}, \\ (w, \tilde{w}) \mapsto \langle w, \tilde{w} \rangle,$$

用矩阵来表示即

$$ds^2(w, \tilde{w}) = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \end{pmatrix},$$

其中 $w = w_1 \mathbf{r}_u + w_2 \mathbf{r}_v, \tilde{w} = \tilde{w}_1 \mathbf{r}_u + \tilde{w}_2 \mathbf{r}_v$. 最后, \mathbb{R}^3 中内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 的双线性、对称性、正定性表明 ds^2 也是双线性、对称、正定的, 因此 ds_p^2 是 $T_p S$ 上的一个内积, 为 $T_p S$ 赋

予了欧氏空间结构. 特别地, $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ 是一个正定矩阵.

例 1.6 平面 $\{(x, y, z) | z = 0\}$ 的一个参数化是 $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, 0)$. 在此参数化下, 容易计算得 $E = G = 1, F = 0$. 此时第一基本形式形如

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

我们可以通过极坐标选取另一参数化 $\mathbf{r}(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, 0), \rho > 0, 0 < \varphi < 2\pi$. 此时

$$\mathbf{r}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad \mathbf{r}_\varphi = (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0),$$

于是 $E = 1, F = 0, G = \rho^2$, 即 $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$.

例 1.7 柱面 $C = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1\}$ 的一个参数化是 $\mathbf{r}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$. 此时

$$\mathbf{r}_u = (-\sin u, \cos u, 0), \quad \mathbf{r}_v = (0, 0, 1),$$

于是 $E = G = 1, F = 0$, 即

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

此时第一基本形式的系数与上一例子中平面在 (u, v) 坐标下的系数一致. 因此, 柱面和平面虽然是不同的曲面, 但是可以选取适当的参数化使得第一基本形式的系数相同. 我们接下来在介绍完第一基本形式相关的几何量 (角度、面积) 后, 将会继续讨论这个问题.

例 1.8 单位球面 $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 可以通过球坐标作如下参数化:

$$\mathbf{r} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta), \quad 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \theta < \pi.$$

此时计算可得

$$\mathbf{r}_\theta = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta), \quad \mathbf{r}_\varphi = (-\sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi \sin \theta, 0),$$

根据三角恒等式可知 $E = 1, F = 0, G = \sin^2 \theta$, 即

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

习题 1.13 在球极投影 (习题 1.12) 下计算单位球面第一基本形式的系数.

习题 1.14 (正螺面) 考虑螺旋线 (1.3). 通过螺旋线上任一点作一平行于 xy 平面、与 z 轴相交的直线. 由这些直线生成的曲面称为正螺面. 正螺面也可视作一条平行于 xy 平面、经过 z 轴的直线在绕 z 轴旋转同时匀速上升的过程中所划过的曲面. 正螺面可以有如下的参数化:

$$\mathbf{r}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

试在此参数化下计算第一基本形式的系数.

由于第一基本形式可以理解为切平面上的内积, 于是这同时也给出了切向量之间角度的定义. 我们设 S 是曲面且 $p \in S$, 取 p 处的两个切向量 $w, \tilde{w} \in T_p S$, 它们所成的角度 θ 满足

$$\cos \theta = \frac{\langle w, \tilde{w} \rangle}{|w||\tilde{w}|} = \frac{ds^2(w, \tilde{w})}{\sqrt{ds^2(w, w)ds^2(\tilde{w}, \tilde{w})}}.$$

如果两条曲线 α, β 满足 $\alpha(0) = \beta(0) = p$, 那么它们在 p 处所成的角, 就定义为 $\alpha'(0)$ 与 $\beta'(0)$ 所成的角. 特别地, 我们任给 p 附近的一个参数化 \mathbf{r} , 那么坐标曲线之间所成的角度的余弦值为

$$\frac{\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle}{|\mathbf{r}_u||\mathbf{r}_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

于是, F 是否为零刻画了两族坐标曲线之间是否正交.

第一基本形式还决定了曲面上区域的面积. 我们设 $A \subseteq S$, 我们称 A 是可测的, 是指对任意 S 的参数化 \mathbf{r} , $\mathbf{r}^{-1}(A)$ 是 \mathbb{R}^2 中的 Lebesgue (勒贝格) 可测集 (这里不要求 $A \subseteq \mathbf{r}(U)$). 我们对面积作如下定义.

定义 1.11 设存在一个参数化 $\mathbf{r}: U \rightarrow S$ 使得可测集 $A \subseteq \mathbf{r}(U)$, 那么 $\mathbf{r}^{-1}(A) \subseteq U$ 是 Lebesgue 可测的. 我们将 A 的面积定义为

$$\sigma(A) = \int_{\mathbf{r}^{-1}(A)} |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| dudv.$$

注 1.9 在每一点 $p \in A$ 处, $|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|$ 表示了在 $T_p S$ 上由 $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ 张成的平行四边形的面积. 我们认为上述定义的面积确实是真正的面积的原因在于, 这个平行四边形的面积能够逼近坐标曲线网在 p 处的面积微元. 我们将不对此作进一步讨论.

注 1.10 利用 $|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|^2 = |\mathbf{r}_u|^2|\mathbf{r}_v|^2 - \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle^2$, 可知

$$|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| = \sqrt{EG - F^2},$$

因此面积是一个由第一基本形式决定的量.

为验证上述定义的合理性, 我们要求证明它和参数化的选取无关. 下面选取另一参数化 $\tilde{\mathbf{r}}: \tilde{U} \rightarrow S$ 使得 $A \subseteq \tilde{\mathbf{r}}(\tilde{U})$, 以及对应的坐标变换 φ 使得 $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \circ \varphi$, 我们希望证明

$$\int_{\mathbf{r}^{-1}(A)} |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| dudv = \int_{\tilde{\mathbf{r}}^{-1}(A)} |\tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{u}} \wedge \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}}| d\tilde{u}d\tilde{v}.$$

根据重积分的换元公式, 并且 $\varphi(\tilde{\mathbf{r}}^{-1}(A)) = \mathbf{r}^{-1}(A)$, 可得

$$\int_{\mathbf{r}^{-1}(A)} |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| dudv = \int_{\tilde{\mathbf{r}}^{-1}(A)} |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right| d\tilde{u}d\tilde{v},$$

而由 (1.6) 式以及向量外积的性质, 可知

$$|\tilde{\mathbf{r}}_u \wedge \tilde{\mathbf{r}}_v| = |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right|$$

处处成立, 从而完成了证明.

注 1.11 当一个可测集不能被一个单独的参数化覆盖时, 我们可以将它分成至多可数个可测集之并, 并且每一个子集都能被一个参数化覆盖. 这样, 我们就可以计算每个部分的面积然后相加. 我们还必须证明这样定义出来的面积与集合划分的方式无关以保证合理性. 我们将略过这部分细节. 另一方面, 在对实际的曲面面积的计算中, 我们通常能够取一个参数化, 足以覆盖整个曲面除去若干条曲线之并. 去掉的部分是零测集 (指的是按上述定义, 面积为零的集合), 因此, 只取一个参数化对实际应用没有太大影响.

习题 1.15 计算环面的面积, 见习题 1.11.

习题 1.16 (旋转面) 设 S 是由 xz 平面中的以下正则曲线:

$$x = \varphi(v), \quad z = \psi(v), \quad v \in (a, b)$$

绕 z 轴旋转得到的曲面, 其中我们假设 $\varphi(v) > 0$. S 可表示为如下集合:

$$S = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} = \varphi(v), z = \psi(v), v \in (a, b)\}.$$

试证明 S 是正则曲面且

$$\mathbf{r} = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v)), \quad v \in (a, b), 0 < u < 2\pi$$

给出了 S 的一个参数化. 计算其第一基本形式的系数.

1.4.3 坐标变换与等距

在上一小节中, 我们简单计算了平面、柱面、球面的第一基本形式, 我们发现在不同的坐标系下 (例如平面的直角坐标和极坐标), 第一基本形式的系数可以不一样, 另一方面, 不同的曲面 (例如平面和柱面) 可以分别存在一个参数化使得第一基本形式的系数相同. 我们将对此展开讨论.

事实上, 在不同坐标系下第一基本形式的系数当然是不一样的, 与坐标系无关的是曲面上曲线的弧长, 这正是第一基本形式的本质. 因此, 在不同的坐标系下, 第一基本形式的系数虽然不一致, 但应该满足一定的关系.

我们设有两个参数化 $\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}$ 以及对应的坐标变换 φ , 设第一基本形式的系数分别是 E, F, G 与 $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$. 根据 (1.6) 式, 可直接计算得到

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} &= \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{u}} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{u}} & \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}} \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

这就是在不同参数化下第一基本形式系数之间满足的关系. 事实上, 由线性代数的知识, 二次型的矩阵在不同的基下的变换由基之间的过渡矩阵给出, 而 $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$ 到 $\{\tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{u}}, \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}}\}$ 的过渡矩阵正是 φ 的 Jacobi (雅可比) 矩阵.

在本节一开始我们曾经提出过是否可以选取有代表性的参数化来研究曲面上的几何. 这里我们断言局部上总能够选择使得 $F \equiv 0$ 的参数化, 我们称之为正交参数化.

命题 1.3 设 $p \in S$ 是曲面 S 上一点. 那么存在 p 附近的一个参数化 $\mathbf{r}: U \rightarrow S$, $p \in \mathbf{r}(U)$ 使得对任意 $(u, v) \in U$, $F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = 0$.

证明 我们先任意选定 p 附近的一个参数化 $\tilde{\mathbf{r}}: \tilde{U} \rightarrow S$, 其第一基本形式的系数是 $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$. 我们的目标是选取函数 $\varphi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v}))$ 使得新的参数化 \mathbf{r} 的第一基本形式系数 E, F, G 满足 $F \equiv 0$. 首先, 我们可以不改变 (\tilde{u}, \tilde{v}) 坐标系中的 \tilde{v} 坐标曲线, 即选取 $u = \tilde{u}$. 下面不妨设 $\tilde{\mathbf{r}}(0, 0) = p$, 我们可以在 p 的局部求解如下常微分方程组:

$$\begin{cases} \tilde{u}'(t; v) = -\tilde{G}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)), \\ \tilde{v}'(t; v) = \tilde{F}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)), \\ \tilde{u}(0; v) = 0, \tilde{v}(0; v) = v, \end{cases} \quad (1.11)$$

其中 v 充分小. 这实际上是在求解 \tilde{U} 上向量场 $(-\tilde{G}, \tilde{F})$ 的积分曲线. 根据常微分方程理论, 我们知道存在 $(0, 0)$ 在 \tilde{U} 中的一个邻域 W 使得对每一点 $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in W$ 都存在唯一的 v 使得 $(\tilde{u}(t; v), \tilde{v}(t; v))$ 会经过 (\tilde{u}, \tilde{v}) . 这样 $(-\tilde{G}, \tilde{F})$ 的积分曲线实际上给了 W 的一个分层, 我们取 W 上的函数 v 使得 v 在每条积分曲线上都是常数, 特别地, 我们可以取 v 使得对任意 t 都有

$$v(\tilde{u}(t; v), \tilde{v}(t; v)) = v, \quad (1.12)$$

由解的光滑依赖性, 可知 v 是 W 上的光滑函数. 由于 $u = \tilde{u}$, 即 $\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \equiv 1, \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \equiv 0$, 而在曲线 $\tilde{u} = 0$ 上, 根据 v 的构造可知 $\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} = 1$. 由此可知 $\varphi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v}))$ 在

$(\tilde{u}, \tilde{v}) = (0, 0)$ 处的 Jacobi 矩阵非退化, 由反函数定理, 可设 W (必要时缩小 W) 上 φ 可逆且 φ^{-1} 在 $\varphi(W)$ 上光滑. 于是可知 (u, v) 确实给出了 p 处附近的坐标系.

取 $\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}} \circ \varphi^{-1}$. 将 $\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \equiv 1, \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \equiv 0$ 代入 (1.6) 式并整理可知,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{u}} - \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}}, \\ \mathbf{r}_v &= \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

这里用到了 $\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}$ 在 W 中非零 (由于 $\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}$ 在 $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (0, 0)$ 时为 1, 必要时缩小 W 即可). 于是

$$\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \right)^{-1} \tilde{F} - \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \right)^{-2} \tilde{G}.$$

为说明此式为零, 只需在 (1.12) 式上对 t 求导并利用方程组 (1.11) 可得

$$\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \tilde{u}'(t) + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \tilde{v}'(t) = -\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \tilde{G} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \tilde{F} = 0.$$

这就完成了证明. □

上述方法是具有代表性的. 通过选取两族积分曲线, 下面的结论仍然是正确的.

习题 1.17 任给 $p \in S$ 在曲面上的一个邻域内的两族切向量场 V_1, V_2 且 $V_1 \wedge V_2$ 处处非零. 那么存在 p 附近的一个参数化 \mathbf{r} 使得对任意 $(u, v) \in U$, \mathbf{r}_u 与 V_1 平行, \mathbf{r}_v 与 V_2 平行.

注 1.12 命题 1.3 的证明是一个特殊的情况: $V_1 = \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}}, V_2$ 是任取的处处与 V_1 正交的向量场, 例如 $V_2 = -\tilde{G}\tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{u}} + \tilde{F}\tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}}$.

我们很自然地会追问: 习题 1.17 结论中的“平行”能否改进为“相等”? 命题 1.3 的证明中, (1.13) 式表明 $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ 并不一定是预给的向量场 V_1, V_2 , 其系数与坐标变换 φ 有关. 如果这样的改进成立, 那么我们就有参数化使得 $\mathbf{r}_u = V_1, \mathbf{r}_v = V_2$, 此时 $E = \langle V_1, V_1 \rangle, F = \langle V_1, V_2 \rangle, G = \langle V_2, V_2 \rangle$. 由此可看出, 预给 V_1, V_2 等价于预给函数 E, F, G . 于是这个改进的本质是: 是否可以选取参数化使得其第一基本形式的系数是预给的函数 E, F, G (当然对应的对称矩阵必须是正定的). 正交参数化的选取相当于预给 $F \equiv 0$ 而 E, G 不作限制. 这个改进的一个特殊情形是: $E = G \equiv 1, F \equiv 0$. 也就是说, 对任意曲面, 是否总能在局部上选取参数化使得其第一基本形式与平面一致? 在曲线论中, 其对应物就是弧长参数化的选取, 此时可以使得 $|\gamma'(s)| \equiv 1$.

注 1.13 两个曲面如果在局部上能够选择参数化使得第一基本形式的系数相同, 那么根据 (1.8) 式, 两个曲面上曲线的弧长, 以及曲线所成的角度和面积等几何信息应该完全一致. 因此, 我们如果能够找到两个曲面之间在弧长、角度、面积以及其衍生物上的差异, 就可断言它们不可能选到具有相同第一

基本形式系数的参数化. 我们下面通过一个直观的论证表明, 球面的任何一点的附近都不可能选取参数化使得第一基本形式的系数与平面的一致. 我们想象 $N = (0, 0, 1)$ 为单位球面 S^2 的北极. 取 $\varepsilon > 0$ 充分小, 记 $S_\varepsilon(N)$ 是从 N 出发的沿经线走长度为 $\varepsilon > 0$ 的点的集合, 它事实上就是球坐标系下的纬圆 $\varphi = \varepsilon$. 我们可以定义球面 S^2 上的内蕴距离为连接两点的曲线长度的下确界, 那么可以证明 $S_\varepsilon(N)$ 就是在内蕴距离下到 N 距离为 ε 的点的集合, 因此是一个球面上的“半径为 ε 的圆”. 直接计算可知这个圆的周长为 $2\pi \sin \varepsilon$, 因此“圆周率”为 $\pi \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}$, 与平面几何中的圆周率并不相等! 我们注意到上面的所有计算实质上都只与第一基本形式 (即曲面上曲线的弧长) 有关, 这就表明球面上无法选取坐标系使得第一基本形式的系数与平面的一致, 球面是“内蕴弯曲”的!

注 1.14 在曲面论中, 我们仍然能选取到比正交参数化满足更多性质的参数化.

定理 1.2 设 $p \in S$ 是曲面 S 上一点. 那么存在 p 附近的一个参数化 $\mathbf{r}: U \rightarrow S$, $p \in \mathbf{r}(U)$ 使得对任意 $(u, v) \in U$, $E = G, F = 0$.

满足上述的结论的坐标系称为等温坐标系. 上述结论表明曲面的任意点附近都能找到等温坐标系, 这与曲面上每一点的局部都可赋予复结构有关. 上述等温坐标系的存在性的证明见于各种 Riemann (黎曼) 面的教材, 由于其涉及一些复分析的知识, 与本书主题相距较远, 故不在这里给出.

根据上述讨论, 并非任意两个曲面 (即使是局部上) 都可选择参数化使得第一基本形式有相同的系数, 仅仅由第一基本形式决定的几何就可以包含“弯曲”的信息. 虽然曲面上第一基本形式的定义借助了背景空间 \mathbb{R}^3 的内积结构, 但是一旦确定了第一基本形式 (的系数), 我们就可以抛开背景空间 \mathbb{R}^3 , 仅仅利用 (1.8) 式来计算曲线的弧长、角度以及面积等几何量. 我们甚至可以任给函数 E, F, G (使得对应的矩阵是正定的) 来定义第一基本形式而研究其能决定的几何, 并忽略这个第一基本形式是否是从某个背景空间诱导而来的. 完全由第一基本形式决定的几何称为内蕴几何, 我们将在下一章展开详细的讨论.

最后, 我们引入等距的概念, 来描述那些能选取参数化使得第一基本形式系数相同的曲面.

定义 1.12 设有微分同胚 $f: S \rightarrow \tilde{S}$, 且对任意 $p \in S$ 满足如下性质: 存在 p 附近的参数化 $\mathbf{r}: U \rightarrow S$, 其对应的第一基本形式系数为 E, F, G , 与 \tilde{S} 在 $f(p)$ 附近的参数化 $\tilde{\mathbf{r}} := f \circ \mathbf{r}: U \rightarrow \tilde{S}$ 的第一基本形式系数 $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ 对应相等:

$$E = \tilde{E}, \quad F = \tilde{F}, \quad G = \tilde{G}, \quad (u, v) \in U.$$

我们则称 f 是 S 到 \tilde{S} 的等距, 并称 S 与 \tilde{S} 之间等距. 我们称 f 是 S 到 \tilde{S} 的局部等距,

是指对任意 $p \in S$, 都存在 p 在 S 中的邻域 V 使得 $f: V \rightarrow f(V)$ 是等距.

注 1.15 f 光滑指的是对任意 S 的参数化 $\mathbf{r}: U \rightarrow S$, $f \circ \mathbf{r}: U \rightarrow \tilde{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ 都是光滑的. $f: S \rightarrow \tilde{S}$ 称为一个 (光滑) 微分同胚, 是指 f 是光滑的双射, 且 $f^{-1}: \tilde{S} \rightarrow S$ 也光滑.

根据这个定义, 如果在两个曲面的两个对应点附近能选取 (例如, 通过适当的坐标变换) 具有相同的第一基本形式系数的参数化, 那么曲面在这两个对应点附近是等距的:

命题 1.4 如果存在曲面 S, \tilde{S} 上对应两点 p, \tilde{p} 附近的参数化 $\mathbf{r}: U \rightarrow S$ 以及 $\tilde{\mathbf{r}}: U \rightarrow \tilde{S}$ 使得对应的第一基本形式系数在 U 上相同, 那么 $\mathbf{r}(U) \subseteq S$ 与 $\tilde{\mathbf{r}}(U) \subseteq \tilde{S}$ 是等距的.

证明 只需取 $f = \tilde{\mathbf{r}} \circ \mathbf{r}^{-1}$ 直接验证即可. □

习题 1.18 试证明等距可以定义为如下不借助参数化的形式: 微分同胚 $f: S \rightarrow \tilde{S}$ 是等距, 当且仅当对任意 $p \in S$ 以及任意经过 p 的曲线 $\alpha, \beta, \alpha(0) = \beta(0) = p$, 都有

$$\langle \alpha'(0), \beta'(0) \rangle = \langle (f \circ \alpha)'(0), (f \circ \beta)'(0) \rangle.$$

下面我们看几个等距的基本例子.

例 1.9 考虑平面 $\{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\}$ 到柱面 $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1, z \in \mathbb{R}\}$ 之间的映射

$$f(x, y, 0) = (\cos x, \sin x, y).$$

由例 1.6、例 1.7 可知, 这是平面到柱面的局部等距. 几何上, 映射 f 是将一张纸“卷”成一个圆筒的形状. 这个映射保持第一基本形式所对应的几何现象是: 纸上的任意一条线段在卷起来之后是圆筒上的线, 其长度与它在纸上时的长度并没有发生改变.

例 1.10 如果 O 是 \mathbb{R}^3 中的正交变换, $p \in \mathbb{R}^3$, S 是曲面, 则 $O + p$ 在 S 上的限制是 S 到 $O(S) + p$ (这也是一个正则曲面) 的等距, 即刚体运动限制到曲面上是等距. 事实上, 任给一个参数化 $\mathbf{r}: U \rightarrow S$, 只需注意到

$$(O \circ \mathbf{r} + p)_u = O(\mathbf{r}_u), \quad (O \circ \mathbf{r} + p)_v = O(\mathbf{r}_v),$$

且对任意 $w, \tilde{w} \in \mathbb{R}^3$, 都有 $\langle O(w), O(\tilde{w}) \rangle = \langle w, \tilde{w} \rangle$ 即可. 特别地, 如果 S 是单位球面 \mathbb{S}^2 , 那么 $O|_{\mathbb{S}^2}$ 是 \mathbb{S}^2 到自身的等距.

习题 1.19 (悬链面) 悬链线

$$x = a \cosh v, \quad z = av, \quad v \in \mathbb{R}$$

绕 z 轴旋转得到的曲面称为悬链面. 它的一个参数化为

$$\mathbf{r}(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av), \quad v \in \mathbb{R}, 0 < u < 2\pi$$

(见习题 1.16).

(1) 计算悬链面的第一基本形式在上述参数化下的系数.

(2) 证明正螺面 (见习题 1.14) 在如下参数化下与悬链面有相同的第一基本形式系数:

$$\mathbf{r}(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au), \quad 0 < u < 2\pi, v \in \mathbb{R}.$$

注意: 与习题 1.14 对比, 将之前的 v 换成 $a \sinh v$.

习题 1.20 试将注 1.13 中的讨论严格化, 证明平面与单位球面的任意两点的任意两个邻域之间都不等距.

1.5 第二基本形式、Gauss 曲率和平均曲率

这一节我们讨论曲面的外蕴几何. 这指的是那些与曲面如何放置在背景空间 \mathbb{R}^3 中有关的几何信息. 这是研究曲面弯曲最直观的方式. 在曲线论中, 我们通过研究其切方向和密切平面 (或从法向量) 的变化来研究曲线的弯曲. 这说的其实是曲线的外蕴弯曲. 曲线是没有类似曲面的内蕴弯曲的, 因为其总能选取弧长参数化.

我们将通过两个方法来研究曲面的弯曲: 其一是研究曲面的切平面的变化来研究曲面的弯曲, 这类似于对曲线弯曲的研究; 其二是研究曲面上曲线的弯曲, 利用曲线的弯曲来刻画曲面的弯曲. 当然我们最终会看到它们都导向同一个结果.

1.5.1 Gauss 映射与 Weingarten 变换

我们首先定义曲面的法向量. 任给曲面 S 上一点 $p \in S$, S 在 p 处的法向量指在 p 处与 $T_p S$ 正交的向量. 我们记 $N(p)$ 为 S 在 p 处的单位法向量. 对每一点 p , $N(p)$ 的选择有两种. 在 p 的一个充分小的邻域内, 我们总可以选择 $N(q)$ 使得 $q \mapsto N(q)$ 是一个光滑映射. 这是因为, 任选 p 附近的参数化 $\mathbf{r}: U \rightarrow S$, 那么 N 可以有如下两种选择:

$$N(q) = \pm \frac{\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|}(u, v),$$

其中 $q = \mathbf{r}(u, v)$ (请注意, N 的定义本身并不依赖于参数化的选取). 这样定义的 $N: q \mapsto N(q) \in \mathbb{S}^2$ 称为 p 附近的 **Gauss (高斯) 映射**. 如果曲面 S 上有整体定义的光滑的 Gauss 映射 $N: S \rightarrow \mathbb{S}^2$, 我们就称 S 是可定向的, N 是 S 的一个定向.

由于切平面的变化就是法向量的变化, 因此对映射 N 求导应该能反映出曲面弯曲的信息. 下面我们给定曲面 S 以及 $p \in S$ 并且选取 p 附近的 Gauss 映射 N . 任选 p 附近的参数化 $\mathbf{r}: U \rightarrow S$, 那么 $N \circ \mathbf{r}$ 是 U 到 $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ 的映射. 我们很多时候都会将 N

理解为 $N \circ \mathbf{r}$ 而不加说明. 例如我们会记

$$N_u = (N \circ \mathbf{r})_u, \quad N_v = (N \circ \mathbf{r})_v,$$

由于 N 是单位长的, 因此 $\langle N_u, N \rangle = \langle N_v, N \rangle = 0$. 这表明 $N_u, N_v \in T_{\mathbf{r}(u,v)}S$. 因此, 存在矩阵 (a_{ij}) 使得

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}\mathbf{r}_u + a_{21}\mathbf{r}_v, \\ N_v &= a_{12}\mathbf{r}_u + a_{22}\mathbf{r}_v. \end{aligned} \tag{1.14}$$

因此, 矩阵 (a_{ij}) 反映了曲面的法向量 N 是如何变化的, 即曲面弯曲的信息. 我们称这个矩阵决定的线性变换为 **Weingarten (魏因加滕) 变换**.

定义 1.13 p 处的 **Weingarten 变换** \mathcal{W} 定义为 T_pS 到自身的线性映射, 使得其在基 $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$ 下的矩阵是 $-\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, 等价地, \mathcal{W} 满足 $\mathcal{W}(\mathbf{r}_u) = -N_u, \mathcal{W}(\mathbf{r}_v) = -N_v$.

Weingarten 变换不依赖于参数化的选取. 这是因为如果选 p 附近的另一参数化 $\tilde{\mathbf{r}}$, 那么根据 (1.6) 式、 \mathcal{W} 的线性性以及链式法则,

$$\mathcal{W}(\tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{u}}) = \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \mathcal{W}(\mathbf{r}_u) + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \mathcal{W}(\mathbf{r}_v) = -\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} N_u - \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} N_v = -N_{\tilde{u}},$$

$\mathcal{W}(\tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}}) = -N_{\tilde{v}}$ 是类似的.

注意到如果改变 N 的选取, \mathcal{W} 的定义将会相差一个负号.

习题 1.21 试证明 Weingarten 变换有如下不借助参数化的定义方式: 任选 $v \in T_pS$, 选取曲线 $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ 使得 $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$, 那么 $\mathcal{W}(v) = -(N \circ \gamma)'(0)$. 这其实表明 p 处的 Weingarten 变换 \mathcal{W} 是 $-(N - N(p))$ 的线性主部 (微分).

例 1.11 平面的 Weingarten 变换为零. 这是因为平面的单位法向量场不改变, 所以 (在任意参数化下都有) $N_u = N_v \equiv 0$.

例 1.12 我们来计算单位球面 S^2 的 Weingarten 变换. 我们选取 N 为单位球面的单位内法向 $N = (-x, -y, -z), (x, y, z) \in S^2$, 即单位球面的位置向量与单位内法向刚好相差一个符号. 因此, 对任意的参数化 \mathbf{r} , $N(\mathbf{r}(u, v)) = -\mathbf{r}(u, v)$. 那么 $\mathcal{W}(\mathbf{r}_u) = -N_u = \mathbf{r}_u, \mathcal{W}(\mathbf{r}_v) = -N_v = \mathbf{r}_v$, 因此 $\mathcal{W} = id$ (恒等变换).

例 1.13 我们计算柱面 $C: x^2 + y^2 = 1$ 的 Weingarten 变换. 我们选取 N 为柱面的单位内法向 $N = (-x, -y, 0), (x, y, z) \in C$. 选参数化 $\mathbf{r}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, 我们有 $N(\mathbf{r}(u, v)) = (-\cos u, -\sin u, 0)$. 那么 $\mathcal{W}(\mathbf{r}_u) = -N_u = (-\sin u, \cos u, 0) = \mathbf{r}_u, \mathcal{W}(\mathbf{r}_v) = -N_v = 0$, 那么对任意 $w = w_1\mathbf{r}_u + w_2\mathbf{r}_v = (-w_1 \sin u, w_1 \cos u, w_2)$, $\mathcal{W}(w) = w_1\mathbf{r}_u = (-w_1 \sin u, w_1 \cos u, 0)$. 不用参数化来写, 即为

$$\mathcal{W}(-y, x, z) = (-y, x, 0),$$

其中 $(-y, x, z) \in T_{(x,y,z)}C$.

命题 1.5 Weingarten 变换关于第一基本形式是自伴的, 即对任意 $v, \tilde{v} \in T_pS$, 都有

$$\langle \mathcal{W}(v), \tilde{v} \rangle = \langle v, \mathcal{W}(\tilde{v}) \rangle.$$

证明 我们仅需选取 p 附近的参数化并针对基 $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$ 进行验证即可. 因此仅需说明

$$\langle -N_u, \mathbf{r}_v \rangle = \langle -N_v, \mathbf{r}_u \rangle.$$

利用 N 与 \mathbf{r}_v 的正交性可知 $\langle N, \mathbf{r}_v \rangle_u \equiv 0$, 于是

$$\langle -N_u, \mathbf{r}_v \rangle = \langle N, \mathbf{r}_{vu} \rangle.$$

同理 $\langle -N_v, \mathbf{r}_u \rangle = \langle N, \mathbf{r}_{uv} \rangle$. 由于混合偏导数相等, 于是我们完成了证明. \square

Weingarten 变换的自伴性告诉我们

$$(v, \tilde{v}) \mapsto \langle v, \mathcal{W}(\tilde{v}) \rangle$$

是 T_pS 上的一个对称双线性型. 等价地, $v \mapsto \langle v, \mathcal{W}(v) \rangle$ 是 T_pS 上的二次型, 我们称之为 S 在 p 处的第二基本形式, 记为 II_p , 即 $II_p(v) = \langle v, \mathcal{W}(v) \rangle$. 改变 N 的选择也将会改变第二基本形式的符号.

下面任选 p 附近的参数化 $\mathbf{r} : U \rightarrow S$, 令 $w = w_1\mathbf{r}_u + w_2\mathbf{r}_v \in T_pS$, 那么

$$II_p(w) = \langle w, \mathcal{W}(w) \rangle = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

可见第二基本形式的矩阵为如下对称矩阵:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} := - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

e, f, g 称为第二基本形式的系数, 并满足

$$e = \langle \mathbf{r}_u, \mathcal{W}(\mathbf{r}_u) \rangle, \quad f = \langle \mathbf{r}_u, \mathcal{W}(\mathbf{r}_v) \rangle, \quad g = \langle \mathbf{r}_v, \mathcal{W}(\mathbf{r}_v) \rangle.$$

当然, 上述定义并不与特定的 p 有关, 因此在参数化所覆盖的区域内都有定义, e, f, g 是 U 上的函数. e, f, g 的上述表达式有时候不容易用作计算. 由 Weingarten 变换的定义、 \mathbf{r}_u 与 N 的正交性及 Leibniz (莱布尼茨) 法则,

$$e = \langle \mathbf{r}_u, \mathcal{W}(\mathbf{r}_u) \rangle = \langle \mathbf{r}_u, -N_u \rangle = \langle \mathbf{r}_{uu}, N \rangle,$$

并且类似地, 我们有

$$f = \langle \mathbf{r}_{uv}, N \rangle, \quad g = \langle \mathbf{r}_{vv}, N \rangle.$$

注 1.16 第二基本形式的几何意义可以通过曲面在一点 p 附近的点到 p 处的切平面的距离来研究. 下面我们给定经过 p 的曲线 $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ 使得 $\gamma(0) = p$. $\gamma(t)$ 到 $T_p S$ 的距离为 $d(t) = \langle \gamma(t) - \gamma(0), N(p) \rangle$, 这个距离可以带符号, 它是正的当且仅当 $\gamma(t)$ 位于切平面在 N 指向的那一侧. 我们给定 p 附近的坐标系参数化 \mathbf{r} 且设 γ 在坐标系下的表达为 $(u(t), v(t))$, 计算 d 的导数

$$d'(t) = \langle \gamma'(t), N(p) \rangle = \langle u'(t)\mathbf{r}_u + v'(t)\mathbf{r}_v, N(p) \rangle$$

(注意到 $d'(0) = 0$) 以及其二阶导数在 $t = 0$ 的取值

$$\begin{aligned} d''(0) &= \langle u'(0)\mathbf{r}'_u + v'(0)\mathbf{r}'_v, N(p) \rangle \\ &= \langle (u'(0))^2\mathbf{r}_{uu} + 2u'(0)v'(0)\mathbf{r}_{uv} + (v'(0))^2\mathbf{r}_{vv}, N(p) \rangle \\ &= (e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2)|_p = II_p(\gamma'(0)). \end{aligned}$$

因此, 我们可以将第二基本形式记为

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

来表示曲面在每一点附近的点距离该点的切平面的距离的主要部分 (Taylor 展开的平方项).

习题 1.22 证明刚体运动不改变曲面的第二基本形式. 准确地说, 设 \mathbf{r} 是曲面 S 上的一个参数化, e, f, g 分别是其第二基本形式的系数. 设 O 是 \mathbb{R}^3 中的正交变换, $p \in \mathbb{R}^3$, 则在参数化 $O \circ \mathbf{r} + p$ 下, $O(S) + p$ 的第二基本形式系数也是 e, f, g .

习题 1.23 设曲面 S 是一个函数 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 的图像 $\Gamma_f = \{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in U\}$, 那么一个自然的参数化是

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

试计算 Γ_f 在这个参数化下的第一基本形式与第二基本形式的系数.

习题 1.24 使用习题 1.16 中旋转面的参数化计算旋转面的第二基本形式的系数 (可假设转出旋转面的曲线是弧长参数化的, 即 $(\varphi')^2 + (\psi')^2 \equiv 1$).

1.5.2 法曲率

接下来, 我们通过研究表面上的曲线来研究曲面的弯曲. 这是一个很自然的思路, 因为曲面的弯曲会导致落在其上的曲线产生弯曲. 例如, 球面上不可能有直线, 从而我们认为球面是弯曲的. 柱面上可以有直线, 也可以有其他曲线, 因此它也应该有某种程度

的弯曲 (但是柱面与平面有相同的第一基本形式!). 另一方面, 平面上也可以有曲线, 因此曲面上曲线的弯曲并非完全是曲面弯曲的产物, 有一部分是曲线“自身”的弯曲. 我们要考虑的是因曲面弯曲的影响而导致的弯曲并排除掉曲线自身弯曲的部分, 这就是法曲率.

下面设 $p \in S$ 且 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ 是弧长参数化的, 满足 $\gamma(0) = p$. 回忆一下 $\kappa(0) = |\gamma''(0)|$ 是曲线在 p 处的曲率. 我们定义曲线 γ 在 p 处的法曲率为

$$\kappa_n(\gamma) = \langle \gamma''(0), N(p) \rangle,$$

其中 $N(p)$ 是 S 在 p 处的一个单位法向量. 这也就是说法曲率是曲线的曲率在曲面法方向的分量. 这里我们不难看出 $\kappa_n(\gamma)$ 正好是注 1.16 中定义的 $d''(0) = II_p(\gamma'(0))$. 特别地, 它不依赖于曲线本身而仅依赖于曲线在 p 处的切向量 (这被称为 Meusnier (默尼耶) 定理). 因此, 我们可以对法曲率作如下定义.

定义 1.14 设 $p \in S, v \in T_p S, |v| = 1$. S 在 p 处关于 v 的法曲率 $\kappa_n(v)$ 定义为关于满足 $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$ 的弧长参数化的曲线的 γ 的法曲率 $\langle \gamma''(0), N(p) \rangle$. 等价地, $\kappa_n(v) = II_p(v)$, 其中 II_p 是 S 在 p 处的第二基本形式.

注 1.17 事实上, 我们不需借助第二基本形式就可以证明法曲率的定义只与曲线在 p 处的切向量有关. 法曲率可视作 $\langle \gamma''(s), N(\gamma(s)) \rangle$ 在 $s=0$ 处的取值, 根据 Leibniz 法则以及 γ' 与 N 的正交性, 可知

$$\langle \gamma''(s), N(\gamma(s)) \rangle \Big|_{s=0} = -\langle \gamma'(0), (N(\gamma(s)))' \Big|_{s=0} \rangle,$$

根据链式法则, 等号右边当然只与 $\gamma'(0)$ 有关. 进一步, 根据习题 1.21, 等号右边恰好是 $\langle \gamma'(0), \mathcal{W}(\gamma'(0)) \rangle = II_p(\gamma'(0))$, 得到了相同的结果.

我们可以通过法截线来表明法曲率确实是曲线的曲率中被曲面弯曲所影响到的部分. 设 $p \in S, v \in T_p S, |v| = 1$. 曲面在 p 处关于 v 的法截线, 指的是经过 p 且由 v 与 p 处的法向量 $N(p)$ 所确定的平面 (称为法截面) 与 S 相交所得到的曲线. 我们设这条曲线被弧长参数化为 γ 且 $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. 由于 γ 是平面曲线, 因此 $\gamma''(0)$ 也平行于法截面. 但由于 γ 是弧长参数化的, $\gamma'(0)$ 与 $\gamma''(0)$ 正交, 因此 $\gamma''(0)$ 与 $N(p)$ 平行. 因此 $|\gamma''(0)| = |\langle \gamma''(0), N(p) \rangle| = |\kappa_n(v)|$, 即法截线的曲率与法曲率的绝对值相等. 直观上, 由于法截线是法截面 (这是一个平面) 上的曲线, 因此法截线在 p 处没有“自身”的弯曲, 其所有弯曲都是曲面的弯曲造成的.

例 1.14 我们下面通过法截线计算马鞍面 $z = y^2 - x^2$ 在 $(0, 0, 0)$ 处关于法向 $N = (0, 0, 1)$ 的法曲率. 任取 $v = (v_1, v_2, 0)$ 是马鞍面在 $(0, 0, 0)$ 处的单位切向量 ($v_1^2 + v_2^2 = 1$). 那么对应的法截线可参数化为

$$\gamma_v(t) = (tv_1, tv_2, t^2(v_2^2 - v_1^2)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

利用习题 1.3 可直接计算其在 $t = 0$ 处的曲率为 $\kappa(v) = 2|v_2^2 - v_1^2|$. 当 $v_2^2 > v_1^2$ 时 $\gamma_v''(0)$ 与 N 同向, $v_2^2 < v_1^2$ 时反向, 于是可知马鞍面在 $(0, 0, 0)$ 处关于 $N = (0, 0, 1)$ 的法曲率

$$\kappa_n(v) = 2(v_2^2 - v_1^2).$$

1.5.3 主曲率、Gauss 曲率与平均曲率

无论以何种方式, 我们都将曲面的弯曲归结到其第二基本形式 (或 Weingarten 变换) 上. 因为我们关心的是在重新参数化下不变的性质, 回顾一个线性变换的与基选取无关的行为就完全归结到其特征值上, 我们应该考虑 Weingarten 变换的特征值.

习题 1.25 对任意 $p \in S$, p 处的 Weingarten 变换 \mathcal{W} 存在两个实的特征值 $\kappa_1 \geq \kappa_2$, 且可选择对应的单位正交的特征向量 $e_1, e_2 \in T_p S$. 此外, κ_1, κ_2 分别满足

$$\kappa_1 = \max_{|v|=1} \kappa_n(v), \quad \kappa_2 = \min_{|v|=1} \kappa_n(v).$$

试证明此结论.

定义 1.15 对任意 $p \in S$, p 处的 Weingarten 变换 \mathcal{W} 的两个特征值 κ_1 和 κ_2 称为 S 在 p 处的**主曲率**, 对应的单位特征向量 $e_1, e_2 \in T_p S$ 称为**主方向**.

注 1.18 由习题 1.25 中的结论, 主曲率分别为法曲率中的最大、最小值. 注意当 $\kappa_1 = \kappa_2$ 时, 任意 $v \in T_p S$ 都是特征向量, 此时所有方向都是主方向. 满足 $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$ 的点 p 称为 S 的**脐点**. 此时 p 处的所有法曲率都相等.

习题 1.26 依如下步骤证明若连通的正则曲面 S 上任一点都是脐点 (称为**全脐点曲面**), 那么 S 是平面或球面的一个开子集.

(1) 设 $\kappa = \kappa(p)$ 是 p 处的法曲率, 选取参数化 \mathbf{r} 并证明 $N_u = -\kappa \mathbf{r}_u, N_v = -\kappa \mathbf{r}_v$. 据此证明 κ 在 S 上是常数.

(2) 证明 $\kappa \equiv 0$ 时 S 为平面的开子集, κ 为非零常数时 S 为球面的开子集.

习题 1.27 (Euler (欧拉) 公式) 设 κ_1, κ_2 是曲面在一点 p 处的**主曲率**, e_1, e_2 是对应的单位正交的主方向, $v \in T_p S, |v| = 1$ 且 v 与 e_1 的夹角为 θ . 证明

$$\kappa_n(v) = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta.$$

注意到 κ_1, κ_2 作为 p 的函数可能存在不光滑点 (在 $\kappa_1 = \kappa_2$ 处产生), 因此 κ_1, κ_2 通常不是好的研究对象. 对于可对角化的 2 维的线性变换 \mathcal{W} 而言, 它的行列式和迹 (是光滑的) 足以完全代替其两个特征值, 是好的研究对象.

定义 1.16 定义 S 在 p 处的**Gauss 曲率** $K(p) := \det \mathcal{W} = \kappa_1 \kappa_2$, **平均曲率** $H(p) := \operatorname{tr} \mathcal{W} = \kappa_1 + \kappa_2$.

由 (1.15) 式, Weingarten 变换在坐标基 $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$ 下的矩阵为

$$-\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix},$$

因此根据行列式的形式, 其 Gauss 曲率在坐标系下的表达为

$$K = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

其平均曲率为

$$H = -a_{11} - a_{22} = \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

由于 $K = \kappa_1\kappa_2, H = \kappa_1 + \kappa_2$, 通过二次方程求根公式可知

$$\kappa_1 = \frac{H + \sqrt{H^2 - 4K}}{2}, \quad \kappa_2 = \frac{H - \sqrt{H^2 - 4K}}{2}.$$

习题 1.28 计算环面在参数化 (1.5) 下的第二基本形式系数, 计算 Gauss 曲率 K 及其在环面上的积分

$$\iint_{0 < \theta, \varphi < 2\pi} K \sqrt{EG - F^2} d\theta d\varphi.$$

习题 1.29 (Enneper (恩尼珀) 曲面) 考虑参数曲面

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right),$$

试证明:

- (1) 证明其第一基本形式系数 $E = G = (1 + u^2 + v^2)^2, F = 0$.
- (2) 证明其第二基本形式系数 $e = 2, g = -2, f = 0$.
- (3) 证明其主曲率分别是 $\pm \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}$.
- (4) 证明 $\frac{\mathbf{r}_u}{\sqrt{E}}, \frac{\mathbf{r}_v}{\sqrt{G}}$ 在每一点处都是主方向.

习题 1.30 证明 Gauss 曲率有如下几何意义. 将 Gauss 映射视作曲面 S 到单位球面 \mathbb{S}^2 的映射. 设 $p \in S$ 满足 $K(p) \neq 0$. 设 Ω 是 S 中 p 的邻域, 则 $N(\Omega)$ 是单位球面上 $N(p)$ 的邻域. 证明

$$|K(p)| = \lim_{\Omega \rightarrow p} \frac{\text{Area}(N(\Omega))}{\text{Area}(\Omega)},$$

其中 Area 指相关区域的面积, $\Omega \rightarrow p$ 指的是 $\sup_{x \in \Omega} |p - x| \rightarrow 0$.

习题 1.31 证明正螺面 (见习题 1.14) 与悬链面 (见习题 1.19) 均满足平均曲率 $H \equiv 0$. 平均曲率为零的曲面称为极小曲面. 证明 \mathbb{R}^3 中不存在紧的极小曲面.

习题 1.32 在习题 1.24 的基础上, 在 $(\varphi')^2 + (\psi')^2 \equiv 1$ 的假设下, 证明旋转面满足

$$K = -\frac{\varphi''}{\varphi}, \quad H = \frac{\psi'}{\varphi} - \frac{\varphi''}{\psi'}$$

试求出所有具有常 Gauss 曲率及常平均曲率的旋转面.

1.6 Gauss 绝妙定理与曲面论基本定理

这一节我们将推导 Gauss 的绝妙发现: 通过外蕴几何定义的 Gauss 曲率由内蕴几何完全决定. 当然, 既然是绝妙的发现, 那么我们的推导最开始的目标并不是这个发现. 我们的推导开始于如下自然的问题: 第一基本形式与第二基本形式是否包括了曲面的所有几何信息? 在曲线的情形, 我们有问类似的问题: 曲率和挠率是否能完全决定曲线? 这通过曲线论基本定理得到了解答. 在曲线论中, 回答这个问题的方法是选取 Frenet 标架 $\{t, n, b\}$ 并研究它们的运动. 因此, 在曲面的研究中, 我们也应选取标架并研究它们的运动.

1.6.1 自然标架的运动方程

在上文中, 我们在切平面上使用最多的是坐标基 $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$, 如果加上单位法向量取为 $N = \frac{\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|}$, 我们就得到每一点 $p \in S$ 的一组自然基 $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, N\}$.

为了下面的计算便于书写, 要稍微改变我们的记号, 并且引入 **Einstein (爱因斯坦) 求和约定**. 首先, 将 (u, v) 坐标记为 (u^1, u^2) , 注意我们采用上标的形式, 马上会看到好处. 然后, 将 $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ 记为 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$. 我们也记 $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$ (我们会使用拉丁字母 i, j, k, l, m, n 等来表示 1 或者 2), 这样 \mathbf{r}_{ij} 表示 $\partial_j \mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_{ijk} = \partial_k \partial_j \mathbf{r}_i$, 等等. 而 Einstein 求和约定, 指的是在一个表达式中, 如果同样的字母在上下指标重复出现, 那么在实际运算中就要对该指标 (从 1 到 2) 求和. 例如, 我们可以将切向量 w 表示为 $w = w^1 \mathbf{r}_1 + w^2 \mathbf{r}_2 = w^i \mathbf{r}_i$, 其中 w^1, w^2 是 w 的分量函数 (我们也采用上标). 对于第一基本形式和第二基本形式, 我们记

$$g_{ij} = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle, \quad A_{ij} = \langle \mathbf{r}_{ij}, N \rangle, \quad i, j = 1, 2$$

为第一基本形式和第二基本形式的系数. 没有重复求和的指标表明这些指标必须取遍 1, 2 来得到一系列方程, 因此很多时候我们会隐去 “ $i, j = 1, 2$ ” 等类似的说明. 用回原来的记号, 那就是

$$E = g_{11}, \quad F = g_{12} = g_{21}, \quad G = g_{22}, \quad e = A_{11}, \quad f = A_{12} = A_{21}, \quad g = A_{22}.$$

最后, 我们记 g^{ij} 是 g_{ij} 的逆矩阵的分量.

例 1.15 我们使用 Einstein 求和约定来做一个热身, 重新推导 (1.10) 式. 如果我们将 (\tilde{u}, \tilde{v}) 记为 $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$, 那么 $\tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{u}}, \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}}$ 为 $\tilde{\mathbf{r}}_1, \tilde{\mathbf{r}}_2$. 这样 (1.6) 式可以表示为

$$\tilde{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} \mathbf{r}_k.$$

于是 $\tilde{\mathbf{r}}$ 对应的第一基本形式系数

$$\tilde{g}_{ij} = \langle \tilde{\mathbf{r}}_i, \tilde{\mathbf{r}}_j \rangle = \left\langle \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} \mathbf{r}_k, \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j} \mathbf{r}_l \right\rangle = \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j} \langle \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_l \rangle = \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j} g_{kl}.$$

这就得到了 (1.10) 式 (请注意对比).

下面我们选定曲面 S 的参数化 \mathbf{r} , 在参数化覆盖的范围内, 计算自然标架 $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, N\}$ 在曲面上的运动情况. 我们需要对这些向量场求偏导数. 由于 \mathbf{r}_{ij} 能用自然标架线性表出, 我们记

$$\mathbf{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k + C_{ij} N, \quad (1.16)$$

这里 Γ_{ij}^k 称为 S 在参数化 \mathbf{r} 下的 **Christoffel** (克里斯托费尔) 符号.

$$C_{ij} = \langle \mathbf{r}_{ij}, N \rangle = A_{ij}$$

恰好是第二基本形式的系数. 由于 $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{ji}$, 因此

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k. \quad (1.17)$$

为计算 Γ_{ij}^k , 根据 (1.16) 式以及 \mathbf{r}_i 与 N 的正交性, 我们可得

$$\partial_k g_{ij} = \partial_k \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle = \langle \mathbf{r}_{ik}, \mathbf{r}_j \rangle + \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{jk} \rangle = \langle \Gamma_{ik}^l \mathbf{r}_l, \mathbf{r}_j \rangle + \langle \mathbf{r}_i, \Gamma_{jk}^l \mathbf{r}_l \rangle = \Gamma_{ik}^l g_{lj} + \Gamma_{jk}^l g_{li},$$

由于 i, j, k 是任取的, 因此根据上式以及 (1.17) 式可以得到

$$\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij} = 2\Gamma_{ij}^l g_{lk}.$$

两边同乘 g^{km} (并对 k 求和), 右边变成 $2\Gamma_{ij}^l g_{lk} g^{km} = 2\Gamma_{ij}^l \delta_l^m = 2\Gamma_{ij}^m$, 其中 δ_l^m 是 Kronecker (克罗内克) 记号: $i = j$ 时 $\delta_i^j = 1$, $i \neq j$ 时 $\delta_i^j = 0$. 这里利用的 (g^{ij}) 是 (g_{ij}) 的逆矩阵. 于是我们得到 (将指标 m 换回 k)

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \quad (1.18)$$

就我们目前而言, 这个表达式最重要的是指出 Christoffel 符号只与第一基本形式有关. Christoffel 符号可以通过内蕴的方式定义, 见定义 2.3.

习题 1.33 试将 Christoffel 符号用 E, F, G 的记号表示. 此外, 试不用上述公式, 直接推导当 $F = 0$ 时 Christoffel 符号用 E, G 表示的表达式.

接下来, 根据 (1.14) 式以及 (1.15) 式, 可知

$$N_i = -g^{jk} A_{ij} \mathbf{r}_k.$$

当然, 我们可以不借助这些表达式, 利用 Einstein 求和约定直接推导. 事实上, 由于 N 是单位长的, 故 N_i 与 N 正交, 我们设

$$N_i = a_i^k \mathbf{r}_k,$$

两边与 \mathbf{r}_j 作内积可得

$$-A_{ij} = a_i^k g_{jk}.$$

两边乘 g^{jl} 并调整指标即可得到 N_i 的表达式.

我们将上面推导的关于自然标架 $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, N\}$ 的运动方程总结为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k + A_{ij} N, \\ N_i = -g^{jk} A_{ij} \mathbf{r}_k. \end{cases} \quad (1.19)$$

1.6.2 Gauss-Codazzi 方程与绝妙定理

从运动方程 (1.19) 可看出, 自然标架的导数由自身线性表出的系数可以由第一、第二基本形式完全决定. 与曲线的情形类似, 这应该预示着第一、第二基本形式就是曲面所有的几何信息. 于是, 我们很自然去问任给对称正定矩阵 (g_{ij}) 以及对称矩阵 (A_{ij}) , 是否存在唯一 (相差一个刚体运动) 的曲面 S 使得 S 以 g_{ij}, A_{ij} 为第一、第二基本形式的系数. 然而, 作为一个偏微分方程组, (1.19) 并非总有解. 例如, 方程组

$$\frac{\partial f}{\partial u} = P, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = Q$$

在单连通区域上有解的充分必要条件是

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \equiv 0.$$

这个条件等价于混合偏导数相等 $f_{uv} = f_{vu}$. 因此, 为了方程组 (1.19) 有解, 预给的 (g_{ij}) 以及 (A_{ij}) 必须满足一组等价于 \mathbf{r}, N 的混合偏导数相等的方程组, 也就是说

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{kji} = \mathbf{r}_{kij}, \\ N_{ij} = N_{ji}. \end{cases}$$

这就是 (1.19) 的可积性条件.

由 $\mathbf{r}_{lji} = \mathbf{r}_{lij}$ 可得

$$(\Gamma_{lj}^k \mathbf{r}_k + A_{lj} N)_i = (\Gamma_{li}^k \mathbf{r}_k + A_{li} N)_j,$$

我们仅需计算等号左边并交换 i, j 即可. 直接计算可知左边等于

$$\partial_i \Gamma_{lj}^k \mathbf{r}_k + \Gamma_{lj}^k \mathbf{r}_{ki} + \partial_i A_{lj} N + A_{lj} N_i,$$

代入 (1.19) 可得

$$\partial_i \Gamma_{lj}^k \mathbf{r}_k + \Gamma_{lj}^k (\Gamma_{ki}^m \mathbf{r}_m + A_{ki} N) + \partial_i A_{lj} N - A_{lj} g^{mk} A_{im} \mathbf{r}_k,$$

注意到第二项中 m, k 指标皆为求和, 因此可以将之交换, 也就是说 $\Gamma_{lj}^k \Gamma_{ki}^m \mathbf{r}_m = \Gamma_{lj}^m \Gamma_{mi}^k \mathbf{r}_k$, 代入到上式可得

$$(\partial_i \Gamma_{lj}^k + \Gamma_{lj}^m \Gamma_{mi}^k - A_{lj} g^{mk} A_{im}) \mathbf{r}_k + (\partial_i A_{lj} + \Gamma_{lj}^k A_{ki}) N.$$

由可积性条件, 此时交换 i, j 后相等, 因此比较各项的系数可得

$$\begin{cases} (\text{Gauss}) \partial_i \Gamma_{lj}^k + \Gamma_{lj}^m \Gamma_{mi}^k - A_{lj} g^{mk} A_{im} = \partial_j \Gamma_{li}^k + \Gamma_{li}^m \Gamma_{mj}^k - A_{li} g^{mk} A_{jm}, \\ (\text{Codazzi}) \partial_i A_{lj} + \Gamma_{lj}^k A_{ki} = \partial_j A_{li} + \Gamma_{li}^k A_{kj}. \end{cases} \quad (1.20)$$

这两个方程 (组) 分别称为 **Gauss 方程** 和 **Codazzi (科达齐) 方程**.

我们引入记号

$$R_{ijkl} = g_{kn} (\partial_i \Gamma_{lj}^n - \partial_j \Gamma_{li}^n + \Gamma_{lj}^m \Gamma_{mi}^n - \Gamma_{li}^m \Gamma_{mj}^n),$$

Gauss 方程化为

$$R_{ijkl} = A_{ik} A_{jl} - A_{il} A_{jk}. \quad (1.21)$$

这个方程看上去有 $2^4 = 16$ 个独立的方程, 但是左右两边的项都有相当高的对称性 (见习题 1.34), 使得这个方程实际上只有一个独立的分量:

$$R_{1212} = A_{11} A_{22} - (A_{12})^2 = K(EG - F^2). \quad (1.22)$$

这就得到了 **Gauss 绝妙定理**.

定理 1.3 (Gauss 绝妙定理) 曲面的 Gauss 曲率只与曲面的第一基本形式有关.

注 1.19 这里 R_{ijkl} 实际上是内蕴定义的 Riemann 曲率张量, 我们将在下一章展开讨论.

习题 1.34 利用 (1.18) 式代入 R_{ijkl} 的定义中, 证明 R_{ijkl} 有如下对称性:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = R_{jilk} = R_{klij},$$

并据此证明 (1.21) 式只有一个独立的分量.

习题 1.35 在命题 1.3 中, 我们证明了局部上总能找到使得 $F \equiv 0$ 的正交参数化. 证明在正交参数化下, (1.22) 式等价于如下 Gauss 曲率 K 的计算方式:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right). \quad (1.23)$$

进一步证明在等温坐标系下

$$K = -\frac{1}{2\lambda} \Delta(\log \lambda),$$

其中 $\lambda = E = G$. 据此在球极投影 (见习题 1.12) 下计算球面的 Gauss 曲率.

习题 1.36 利用 Gauss 绝妙定理证明平面和球面之间不存在局部等距. 试与习题 1.20 的证明相比较.

而 Codazzi 方程中必须取 $i \neq j$ ($i = j$ 的情形不含任何实质信息), 因此实际上只有两个独立的分量 $i = 1, j = 2, l = 1, 2$.

习题 1.37 在正交参数化下证明 Codazzi 方程具有如下形式:

$$\begin{aligned} \left(\frac{e}{\sqrt{E}} \right)_v - \left(\frac{f}{\sqrt{E}} \right)_u - g \frac{(\sqrt{E})_v}{G} - f \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} &= 0, \\ \left(\frac{g}{\sqrt{G}} \right)_u - \left(\frac{f}{\sqrt{G}} \right)_v - e \frac{(\sqrt{G})_u}{E} - f \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} &= 0. \end{aligned}$$

最后, 我们还有另一可积性条件 $N_{ij} = N_{ji}$. 这个条件可表示为

$$(g^{lk} A_{il} \mathbf{r}_k)_j = (g^{lk} A_{jl} \mathbf{r}_k)_i.$$

直接计算可表明这个方程等价于 Codazzi 方程. 这样, Gauss-Codazzi 方程 (1.20) 就给出了 (1.19) 的所有可积性条件.

习题 1.38 试证明 $N_{ij} = N_{ji}$ 没有给出更多的方程.

1.6.3 曲面论基本定理

最后, 我们证明曲面论基本定理. 与曲线论基本定理一样, 这个定理表明满足 Gauss-Codazzi 方程的第一、第二基本形式可以完全决定一个曲面.

定理 1.4 (曲面论基本定理) 设 $V \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个开集且 $(g_{ij}), (A_{ij})$ 是 V 上的光滑 (矩阵) 函数. 设 (g_{ij}) 对称正定, (A_{ij}) 对称, 且它们满足 Gauss-Codazzi 方程 (1.20). 那么, 对任意 $(u_0^1, u_0^2) \in V$, 都存在 (u_0^1, u_0^2) 的邻域 $U \subseteq V$, 以及正则参数化曲面 $\mathbf{r}: U \rightarrow \mathbf{r}(U) \subset \mathbb{R}^3$, 使得 $\mathbf{r}(U)$ 是正则曲面且在参数化 \mathbf{r} 下以 $(g_{ij}), (A_{ij})$ 为其第一、第二基本形式的系数矩阵. 如果 U 连通且存在另一 $\tilde{\mathbf{r}}$ 满足相同的条件, 那么存在 \mathbb{R}^3 中的正交变换 O , 以及 $p \in \mathbb{R}^3$ 使得

$$\tilde{\mathbf{r}} = O \circ \mathbf{r} + p.$$

证明 根据 (1.19), 我们在 V 中考虑方程组

$$\begin{cases} (\xi_i)_j = \Gamma_{ij}^k \xi_k + A_{ij} \xi_3, \\ (\xi_3)_i = -g^{jk} A_{ij} \xi_k, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \quad (1.24)$$

其中 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是 V 上的未知 \mathbb{R}^3 向量值函数, Γ_{ij}^k 由 (1.18) 式给出. 上文我们说明了 Gauss-Codazzi 方程 (1.20) 就是方程组 (1.24) 的可积性条件. 任意给定初值条件

$$\xi_\mu(u_0^1, u_0^2) = (\xi_\mu)_0, \quad \mu = 1, 2, 3,$$

根据微分方程的理论, 可知存在 (u_0^1, u_0^2) 的一个邻域 $U \subseteq V$ 使得在 U 中存在唯一解 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 满足方程组 (1.24). 此时, 由 Γ_{ij}^k 以及 A_{ij} 的关于 i, j 的对称性, 可知

$$(\xi_i)_j = (\xi_j)_i,$$

因此, 存在唯一映射 $\mathbf{r} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ 使得 $\mathbf{r}_i = \xi_i$.

下面我们要说明 $\mathbf{r}(V)$ 是正则曲面 (可能要缩小 V) 并且曲面 $\mathbf{r}(V)$ 以 g_{ij}, A_{ij} 为第一、第二基本形式系数. 首先, 我们可以选择 ξ_μ 的初值对任意 $i, j = 1, 2$, 在 (u_0^1, u_0^2) 处满足:

$$\langle \xi_i, \xi_j \rangle = g_{ij}, \quad \langle \xi_i, \xi_3 \rangle = 0, \quad |\xi_3|^2 = 1.$$

我们还可以选择 ξ_3 使得 $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ 成右手系. 这样, 在 (u_0^1, u_0^2) 处 $\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 \neq 0$, 根据连续性, 我们可以缩小 V 使得在 V 内 $\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 \neq 0$, $\mathbf{r}(V)$ 是正则曲面 (见习题 1.9) 且 $\mathbf{r} : V \rightarrow \mathbf{r}(V)$ 是其参数化.

接下来, 我们要证明 $\mathbf{r}(V)$ 在参数化 \mathbf{r} 下的第一、第二基本形式系数确实是预先给定的函数 g_{ij}, A_{ij} . 这个证明的想法类似于曲线论基本定理的对应部分, 我们把这留作习题.

习题 1.39 推导如下一些量所满足的偏微分方程组

$$\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle, \quad \langle \mathbf{r}_i, \xi_3 \rangle, \quad \langle \xi_3, \xi_3 \rangle,$$

并利用唯一性说明 $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \xi_3\}$ 确实是成右手系的正交标架, 且

$$g_{ij} = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle,$$

这就说明了 g_{ij} 是曲面 $\mathbf{r}(V)$ 的第一基本形式系数.

习题 1.40 利用 $\mathbf{r}_i = \xi_i, \xi_3$ 所满足的方程 (1.24), 证明 A_{ij} 确实是曲面 $\mathbf{r}(V)$ 的第二基本形式系数.

最后, 如果两个参数曲面 $\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ 有相同的第一、第二基本形式系数, 那么它们就满足相同的微分方程组 (1.19). 特别地, $\xi_i = \mathbf{r}_i, \tilde{\xi}_i = \tilde{\mathbf{r}}_i$ 以及对应的法向 $\xi_3 = N, \tilde{\xi}_3 = \tilde{N}$, 满足具有相同系数的方程组 (1.24), 并且这组方程组在刚体运动下不改变. 于是, 我们仅需选取正交变换 O 以及 $p \in \mathbb{R}^3$ 使得在 (u_0^1, u_0^2) 处 $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + p, O(\xi_\mu) = \tilde{\xi}_\mu, \mu = 1, 2, 3$, 那么根据偏微分方程组的唯一性, 即可得到 $\tilde{\mathbf{r}} = O \circ \mathbf{r} + p$. \square