前 言

实变函数是一门从古典分析学到现代分析学承上启下的数学课程，其核心问题是在测度论框架下梳理数学分析课程中的 Riemann 积分和微分内容，并在 Lebesgue 积分意义下重新建立和处理相关分析问题。本书为许多数学理论提供了基础，包括泛函分析、偏微分方程、概率论、微分几何等。本书尤其强调数学的严谨性，训练学生如何运用集合论语言进行精确的数学推理和证明，这对于培养逻辑思维和解决问题能力至关重要。

我们知道 $\mathbb{R}^n$ 上支集有界的连续函数空间 $C_c(\mathbb{R}^n)$ 中每一函数都 Riemann 可积。由 Riemann 积分的性质，

$$\Lambda(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ \mathrm{d}x, \qquad f \in C_c(\mathbb{R}^n)$$

定义了 $C_c(\mathbb{R}^n)$ 上的一个实线性泛函，即函数空间 $C_c(\mathbb{R}^n)$ 到实数域的线性映射。因为 Riemann 积分的局限性，我们试图将 Riemann 积分推广至更一般的函数，或者说将泛函 Λ 扩张至一个更大的空间。本书的核心内容要回答这个问题。为此我们引入一个新积分，称作 Lebesgue 积分

$$\int_E f\ \mathrm{d}\mu.$$

这里 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为**一可测集**，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为**一可测函数**，μ 为 $\mathbb{R}^n$ 上一个**测度**，构成了一个三元组 (E, f, μ)。我们设 $L^1(\mathbb{R}^n, \mu)$ 为所有 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f|\ \mathrm{d}\mu < \infty$ 的 $\mathbb{R}^n$ 上的可测实函数全体组成的（线性）空间。对于这个新积分，需要注意以下几点：

(1) 固定 μ 和 $E = \mathbb{R}^n$，我们可以看出该积分是泛函。由积分的线性性质

$$\bar{\Lambda}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\ \mathrm{d}\mu, \qquad f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mu),$$

同样决定了一个线性泛函。我们可以理解泛函 $\bar{\Lambda}$ 为泛函 Λ 从空间 $C_c(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^1(\mathbb{R}^n, \mu)$ 的扩张。但是为了使 $\bar{\Lambda}$ 限制在 $C_c(\mathbb{R}^n)$ 恰为 Λ，测度 μ 必须与几何体的体积相容，同时保持空间的平移不变性。满足这个相容性的测度恰为 Lebesgue 测度。需要指出，泛函扩张需要或者拓扑意义下的连续扩张，或者序结构意义下

的保序扩张，这二者是独立的。另一方面，Riesz 表示定理说明*泛函是积分*。理解测度、积分、泛函相互关系不仅对于理解本书内容十分重要，对于理解后续泛函分析课程中的对偶空间、弱收敛等也是十分有益的。

(2) 固定 f 和 μ，此时我们得到定义在可测集类上的函数 $\Phi_{\mu,f}(E)=\displaystyle\int_E f\,\mathrm{d}\mu$。如果 $f\in L^1(\mathbb{R}^n,\mu)$ 或者 f 非负可测，则 $\Phi_{\mu,f}$ 实质上定义了一个新的测度。此时 f 可以理解成这个测度关于测度 μ 的密度函数。或者说，某种意义下，$\Phi_{\mu,f}$ 关于 μ 的导数恰为 f。这个积分从测度的角度对于进一步学习测度与参考测度的奇异性和绝对连续性、Radon-Nikodým 导数等知识是极为重要的。

本书的第一部分（第二、三章）分别建立了 Lebesgue 积分理论和验证这个与几何体体积相容的 Lebesgue 测度理论。

作为积分理论的重要应用，我们在第四章讨论了 Lebesgue 空间和 Sobolev 空间理论，以及一些常用的如磨光子和卷积等技术。这对于后续继续学习调和分析等其他分析学科十分有益。这是本书的第二部分。

积分与微分的关系无疑是分析学中最为基本的问题。微分能够提供更多关于函数精细性质的刻画，其核心是十分艰深的几何测度论。本书第三部分着重讨论测度论意义下函数的微分问题。对于多元函数，在第五章我们建立了 Lebesgue 微分定理和密度点定理，以及刻画微分变换下测度变化的 Sard 引理。对于一元函数，在第六章我们建立了可求长曲线或者说有界变差函数的微分理论。借助 Stieltjes 积分，有界变差函数理论建立了前面提到的泛函扩张和测度关系的具体表述。关于更特殊的绝对连续函数，我们建立了一元函数关于 Lebesgue 积分的微积分基本定理。总体来说，微分理论相较积分理论更为精细，也是本书较难的部分。

为了体现本书内容对后续高级课题以及现代数学研究的意义，我们对教材内容做了一些选择，主要有以下特点：

(1) 采用先引入抽象 Lebesgue 积分理论，再引入 Lebesgue 测度的思路。因为抽象积分理论的引入在新积分引入的思想后并不显得突兀，并且 Lebesgue 积分的基本理论大多与具体的测度无关，其中包括重要的各类积分收敛模式及其相互之间的关系。这种方式对于同期学习偏微分方程、概率论和随机过程理论等也大有益处。

(2) Lebesgue 测度的引入我们没有采用 Carathéodory 判据的方法。而是将 Lebesgue 积分看成是 Riemann 积分扩张这一更为自然的方式引入，同时将 Lebesgue 测度看成是几何体体积概念的扩张。整个扩张过程充分体现了 Carathéodory 扩张的思想，这对于充分理解较为公理化的 Carathéodory 外测度扩张理论也极有益处。我们还介绍了 Hausdorff 测度这种更一般的几何积分理论中使用的测度，它也基于这种 Carathéodory 构造。

(3) 微分部分是本书同等重视的内容。避开艰深的几何测度论，我们对一般

函数介绍了 Lebesgue 微分定理以及 Hardy-Littlewood 方法，建立 Sard 引理和坐标变换公式。对于一元函数，我们介绍单调函数、有界变差函数及其微分理论，并对绝对连续函数建立了微积分基本定理。另外我们还讨论了如何理解高维有界变差函数。

(4) 强调泛函的思想在测度和积分理论中的重要性。这对于后续泛函分析、偏微分方程、随机分析等课程的学习，以及理解与本课程内在逻辑联系和数学思想的融合富有重要意义。

(5) 为了读者方便，我们撰写了关于 Carathéodory 扩张、Rademacher 定理、凸分析和 Stieltjes 积分的几个附录。

本书主要借鉴了国内外主流实分析教材，尤其是国际上知名大学和研究机构普遍采用的若干经典教程。我们尽可能将课程中的古典内容与近现代分析数学的发展联系起来。作者在南京大学讲授研究生“分析学”和本科生“实变函数”课程过程中，充分实践了本书的理念。教材绝大多数内容适合全日制大学数学类专业本科生。作为周学时为 4 小时的课程，主要内容应可教授完成。本书包含了一定数量的习题，其中一些具有一定的难度。部分带 $*$ 的章节对初学者可以跳过。

教材撰写期间，得到了“101 计划”教材实分析委员会和其他国内兄弟院校专家的关心和指导，以及很多十分中肯和重要的建议和意见，非常感谢。编者诚挚地期望本教材的读者提出更多宝贵意见。同时感谢南京大学数学学院师维学老师在教材编辑期间给予的 LaTeX 技术支持。“问渠那得清如许，为有源头活水来。”我们也希望在教材今后的修订版中将有更多新思想分享给读者。

程 伟 吕 勇 尹会成

2024 年 6 月于南京