前　言

——代数学的基本任务和我们的理解

(一)

数学的起源和发展包括三个方面:

(1) 数的起源、发展和抽象化;

(2) 代数方程 (组) 的建立和求解;

(3) 几何空间的认识、代数化和抽象化。

它们是数学的基本问题。代数学是数学的一个分支，是研究和解决包括这三个方面问题在内的数学基本问题的学问。

一个学科 (课程) 的发展有两种逻辑, 即: 历史的逻辑和内在的逻辑 (公理化)。

首先我们来谈谈**历史的逻辑**。顾名思义, 就是学科产生和发展的实际过程。这一过程对后人重新理解学科和课程的产生动机和本质是至关重要的。并且, 历史的逻辑常常也能成为后学者作为个体学习的自然引领, 我们可以把它称为人类认识的“思维的自相似性”。

自然界和社会中普遍存在“自相似”现象。比如: 原子结构与宇宙星系的相似性; 树叶茎脉结构与树的结构的相似性; 人从胚胎到成人与人类进化的相似性, 等等。其实这种现象也是分形几何研究的对象。类似地, 人类个体对事物认识的过程也常常在重复人类社会历史上对该事物的认识过程。当然, 不能把这个说法绝对化, 否则总能找到反例。

从这个观点出发, 我们在学习过程中应该关注数学史上代数学的一些具体内容是怎么产生和发展的, 以此引导自己的理解。比如, 代数最早的研究对象之一就是代数方程和线性方程组。所以从上述观点出发, 后学者学习线性代数就可以从线性方程组或多项式理论出发。为此我们先来体会一下历史上著名的数学著作《九章算术》(成书于公元 1 世纪左右, 总结了战国、秦、汉时期我国的数学发展) 中的一个问题:

“今有上禾三秉, 中禾二秉, 下禾一秉, 实三十九斗; 上禾二秉, 中禾三秉, 下禾一秉, 实三十四斗; 上禾一秉, 中禾二秉, 下禾三秉, 实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何?”

用现代语言, 是说 “现有三个等级的稻禾, 若上等的稻禾三捆、中等的稻禾两捆、下等的稻禾一捆, 则共得稻谷三十九斗; 若上等的稻禾两捆、中等的稻禾三捆、下等的稻禾一捆, 则共得稻谷三十四斗; 若上等的稻禾一捆、中等的稻禾两捆、下等的稻禾三捆, 则共得稻谷二十六斗。问每个等级的稻禾每捆可得稻谷多少斗?”

在《九章算术》中, 这个问题是通过言辞推理的方法求出答案的。

“荅曰：上禾一秉九斗四分斗之一, 中禾一秉四斗四分斗之一, 下禾一秉二斗四分斗之三。”

相对于现代数学的符号表示法, 言辞推理的表达复杂琐碎, 反映了中国古代数学方法上的局限性。现在我们用 x, y, z 分别表示一捆上、中、下等稻禾可得稻谷的斗数, 则可列出如下关系式:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39, \\ 2x + 3y + z = 34, \\ x + 2y + 3z = 26。 \end{cases}$$

然后用《代数学 (一)》中介绍的 Gauss 消元法, 不难得到

$$x = 9\frac{1}{4}, y = 4\frac{1}{4}, z = 2\frac{3}{4}。$$

这和前面“荅曰”的结果是一致的。

这是一个典型的线性方程组的实例。从这个问题在《九章算术》中的解题方法可见, 它所用的方法本质上就是 Gauss 消元法。所以在这个知识点上, 我们的方法与历史上的方法是符合 “自相似性” 这个特点的。

(二)

然后我们来谈谈学科的**内在逻辑**, 往往学科越成熟, 内在逻辑越重要。学科一旦成熟, 相对稳定了以后, 其内在逻辑可以从公理化的角度重新思考, 使得学科整体的逻辑更清楚, 更容易理解, 而不需要完全依赖于历史的逻辑。我们认为这方面最好的例子也许是 Bourbaki 学派对数学所做的改造。

基于这一观点, 我们希望对代数学找到一条主线, 以此来贯穿和整体把握代数学的整个理论。就代数学而言 (也许可以包括相当部分的数学领域), 我们认为: 不论当初发展的过程如何, 现在的代数学的整体理解应该抓住**对称性**这一关键概念, 来统领整个学科的方法。

我们认为, 对称性的思想是代数学的核心; 各个代数类的表示的实现与代数结构的分类, 是代数学的两翼。

后文中将要介绍的群论, 是刻画对称性的基本工具。但所有代数学的思想和理论, 都在不同层面完成对某些方面的对称性的刻画。比如线性空间、环、域、模 (表示), 乃至进一步的结构, 等等。人类之所以以对称性为美学的基本标准, 就是因为自然规律蕴含的对称性。这也决定了我们学科 (课程) 每个阶段都会面对该阶段对于对称性理解的重要性。

人们通常认为对群的认识是 Galois 理论产生后才逐步建立的。但其实对于对称性的认识, 人们在对数和几何空间的认识过程中就已经逐步建立起来了。对这一事实的认识很重要, 因为这说明, 对于对称性思想的认识, 在人类的整个数学乃至科学发展阶段都是起到关键作用的, 而不仅仅是群论建立之后才是这样。

在《代数学 (一)》的第 2 章中, 我们将通过数的发展来理解人类对于对称性的认识。对于对称性认识的另一方面, 就是人们最终认识到对几何的研究, 就是对于对称性及它的群的不变量的研究。Klein 在他著名的 Erlangen 纲领中将几何学理解为: 表述空间中图形在一已知变换群之下不变的性质的定义和定理的系统称为几何学。换言之, 几何学就是研究图形在空间的变换群之下不变的性质的学问, 或研究变换群的不变量理论的学问。

我们将通过抓住代数学中对称性这一主线, 以前面提到的代数学三大基本问题来引导出整个代数学课程的教学与学习, 从而使我们有能力来回答来自自然界或现实生活中与此相关的实际数学问题。

1. 数的问题: 对数的认识的扩大和抽象化

由正整数半群引出整数群、整数环 $\mathbb{Z}$、有理数域 $\mathbb{Q}$、实数域 $\mathbb{R}$ 和复数域 $\mathbb{C}$。以对称性引出交换半群、交换群、交换环 (含单位元)、域的概念, 再以剩余类群、剩余类环、剩余类域为例, 给出特征为素数 p 的一般的环和域的概念。这里 $\mathbb{Z}$ 是离散的, $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 是连续的, 而 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的稠密部分。

2. 解方程的问题

数学的根本任务之一是解方程。这里说的方程包括微分方程、三角方程、代数方程等。作为代数课程, 一个基本任务就是解决代数方程的问题, 包括: 一元代数方程 (一元多项式方程)、多元线性方程 (组)、多元高次方程组等。与此相关的内容, 就涉及多项式理论、线性方程组理论、二元高次方程组的结式理论等。

3. 对几何空间的代数认识问题

对几何空间的认识, 就是人类对自身的认识, 因为人类是生活在几何空间中的。但对几何空间的认识, 只有通过代数的方法才能实现, 这就是由众所周知的 Descartes 坐标系思想引申出来的。由向量空间 $\mathbb{R}^n$ 到一般的线性空间, 就是几何的代数化和抽象化, 也是线性代数的核心内容。

上述三个方面, 是《代数学》的基本任务, 也是我们展开《代数学 (一)》和《代数学 (二)》所有内容的出发点, 是带动我们思考的引导性问题。我们将学习

的矩阵和行列式, 则是完成这些任务的基本工具。其他所有内容, 都是上述这些方面的交融和发展。

(三)

前面我们提到, 对称性的研究是代数学的核心课题, 而群论是描述对称性的最重要的工具。虽然群论的思想在很早就萌芽了, 但是对群的严格公理化定义和研究则起源于 Galois 对一元代数方程的研究。回顾这段历史对于我们学习代数学甚至是数学这门学科都是非常有益的。古巴比伦人知道如何求解一元二次方程, 但是一元三次方程和一元四次方程的求解问题比二次方程要困难得多, 因此直到 16 世纪才找到求根公式, 这得益于 15 世纪前后发展起来的行列式和线性方程组的理论。人们总结二次、三次和四次方程的求根公式发现一个非常有趣的现象, 那就是所有的求根公式都只涉及系数的加、减、乘、除和开方运算, 这样的求根公式被称为根式解公式。按照人们习惯性的思维方式, 次数小于五的一元代数方程的解都是根式解, 自然会猜测五次或更高次的一元代数方程也有根式解公式。事实上, 很多数学家都试图去证明这一点, 或者试图找出这样的根式解公式, 但都没有获得成功。此后 Abel-Ruffini 定理证明了五次及以上的一元代数方程不存在普遍适用的根式解公式 (这一结果先由 Ruffini 发表, 但是证明有漏洞, 最后 Abel 给出了完整的叙述和证明)。这一定理的发表彻底打破了人们寻求高次方程根式解公式的幻想。

Abel-Ruffini 定理的结论无疑是重要的。但是一个更重要的问题还是没有解决, 因为很多特征非常突出的高次方程肯定是存在根式解的, 因此寻找一般的一元代数方程存在根式解的充要条件成了摆在数学家面前的核心问题。这一问题最终是由 Galois 解决的。1830 年, 19 岁的 Galois 完成了解决这一问题的论文并投稿到巴黎科学院, 因审查人去世, 论文不知所终。次年, Galois 再次提交了论文, 但被审稿人以论证不够充分为由退稿。1832 年 5 月, Galois 在决斗前夕再次修改了他的论文, 并委托朋友再次向巴黎科学院投稿。

由于 Galois 的理论过于超前, 直到他死于决斗后 15 年才发表, 而其中包含的新思想立即引起了众多数学家的极大兴趣。Galois 在他的理论中用到了两种重要的思想。首先是借鉴了 Lagrange 的思想, 将方程的根看成一个集合, 然后考虑根的置换, 这就是最早的群的实例。其次, Galois 将对于四则运算封闭的数集定义为一个域 (数域), 而将解方程的过程看成把新的元素添加到域中的过程, 这里产生的思想就是域的概念和域的扩张理论。Galois 理论的出现吸引了后来的大批数学家系统研究群和域的扩张, 并形成了数学中一个非常重要的分支, 即所谓的抽象代数或近世代数。一般我们将具有运算的非空集合称为一个代数结构。从数学内在的逻辑来看, 群是只有一种运算的代数结构, 因此研究具有两种运算

的代数结构是重要的。如果不考虑减法和除法, 域其实是有两种运算的代数结构, 即加法和乘法 (减法是加法的逆运算, 除法是乘法的逆运算)。但是域的条件过于严苛, 因而很多数学中出现的代数结构都不是域, 例如整数集、多项式的集合等。因此人们系统研究了具有两种运算 (一般称为加法和乘法) 且满足一定条件的代数结构, 这就是环的概念。但是我们必须强调, 数学的发展往往与数学内在的逻辑并不一致。环论的发展并不是按照逻辑进行的。虽然历史上第一个使用环这一名称的数学家是 Hilbert, 但是在他之前有很多数学家已经在环的研究中取得很多重要的成果。环论是现代交换代数的主要研究课题之一。历史上在环论的研究中取得重要成就的数学家包括 E. Artin, E. Noether, N. Jacobson 等。这里特别需要提到的是女数学家 Noether, 她不但在环论中做出杰出的贡献, 而且第一次发现了群的表示理论与模之间的联系, 使得模和表示理论的研究产生了极大的飞跃。

群、环、域、模的理论是本系列教材中《代数学 (三)》和《代数学 (四)》的主要内容。我们这里所说的域论包含了 Galois 理论, 也就是关于一元高次方程根式解存在性的完整理论。此外, 为了适应现代代数学的发展趋势, 我们还在《代数学 (四)》中介绍了范畴的基本知识。范畴论是一门致力于揭示数学结构之间联系的数学分支, 是不同的抽象数学结构的进一步抽象, 因此应用极其广泛。此外, 我们还介绍了 Gröbner 基的一些基础知识, 特别是给出了 Hilbert 零点定理的证明。我们认为在大学的抽象代数课程中适当介绍这些内容是有益的。

(四)

回到数学中对于对称性的研究。群论是描述和研究对称性的重要理论, 特别地, 对称产生群, 而群又可以用来描述对称性。利用群来研究对称性的最重要的途径就是群在集合上的作用的理论。当一个群作用到线性空间时, 我们自然会希望群的作用保持线性空间的结构, 这就是群的表示的概念。表示理论经过一个多世纪的发展, 已经成为数学中非常庞大的核心领域之一，而且已经不再局限于群的表示。另一方面, 有限群的表示作为表示理论的基础, 已经渗透到几乎所有的数学分支中, 而这正是《代数学 (五)》的主要内容。最后, 作为表示理论的一本入门教材, 我们也在《代数学 (五)》中对李群和李代数的表示理论做了简单的介绍。

回顾前面提出的观点：对称性的思想是代数学的核心; 各个代数类的表示的实现与代数结构的分类, 是代数学的两翼。大体上说，《代数学 (三)》是以研究各代数类的结构为主，而《代数学 (四)》和《代数学 (五)》分别以研究环上的模和群的表示为核心。所谓研究代数类的结构，就是研究这类代数的本身，或者说是研究代数类的内部刻画。而研究代数类特别是群和环类的表示 (模)，以及李代数等非结合代数的表示，都可以认为是研究它们的外部刻画。Gelfand 曾

说："所有的数学就是某类表示论"，席南华在他的著名演讲"表示，随处可见"(见文献《基础代数 (三)》) 中认为这就是一种泛表示论的观点，并指出"数学上需要表示得更明确的含义"，这是非常中肯的。但尽管如此，Gelfand 的观点其实也告诉我们表示的重要意义。在数学上来说，表示的意义和"作用"是等价的，也就是一个群或环只有发挥它的"作用"才能体现其用处。这就如同我们去认识一个人，不会限于理解他作为一个实体的"人"的生物性存在，更重要的是去了解他的社会关系，也就是他作为个体对社会整体的作用，这才是他作为一个人存在的价值。所以我们可以理解为什么有些数学家认为"只有表示才是有意义的"，这其实并没有否定代数结构的重要性，它们就是"皮之不存，毛将焉附"的关系。

最后体会一下：我们的《代数学 (一)》和《代数学 (二)》的高等代数内容，就是在"线性关系"或"矩阵关系"下，给各代数类提供让人们尽可能简单地理解一个复杂代数结构的"表示"的可能性。

(五)

上面叙述的就是我们这套教材的主要内容和对它们的理解。需要指出的是，考虑到数学"101 计划"对于教材的高要求, 本套教材无论从内容的选取还是习题设计来说都有一定的难度, 因此不一定适合所有的高校。但是我们认为，这套教材对于我国高水平高校，包括 985、211、双一流高校或其他数学强校都是适用的。此外, 对于一些优秀学生, 或者致力于自学数学的人员, 本套教材也有很好的参考价值。

但需要特别强调的是，本套教材的部分内容完全可以灵活地作为选学内容，这取决于授课的对象、所在学校对学生在该课程上的要求等。

最后需要指出, 人类对于数学的认识, 本来就是以问题为引导的, 所以我们应在问题引导下来学习、认识新概念和新内容。同时, 希望注意下面两点 (供思考):

(1) 一个结论是否成立, 与其所处的环境有关; 环境改变, 结论也会改变。比如: 多项式因式分解与所处域的关系。

(2) 知道怎么证明了, 还需思考为什么这么证、关键点在哪里, 从而通过比较, 为解决其他问题提供思路。

数学的发展是一个整体, 代数学更是如此, 历史上并不是高等代数理论发展完善了, 才开始抽象代数的发展。也就是说, 课程内容的分类, 不是从历史的逻辑, 而是从其内在逻辑和人类对知识的需要来编排和取舍的。因此我们完全有必要重新审视整个代数学内容的安排, 以期更合理也更有益于同学们的学习。本套教材并不认为有必要完全打乱现有的体系, 而是尝试将抽象代数的部分概念和思想, 以自然的状态渗透到高等代数阶段的学习中, 并且希望这样做并不增加这一

阶段的学习负担, 而是更好理解高等代数阶段出现的概念和思想, 也降低抽象代数阶段的 "抽象性", 自然也为后一阶段的学习打下更好的基础。我们希望读者不再觉得抽象代数是抽象的。当然我们这样做更重要的原因是, 希望以理解对称性来贯穿、统领整个代数学的学习, 从而更接近代数学的本质。

作 者

2024 年 7 月