

前言

作为读者,打开一本书之前,总是会想这本书能带来些什么.作为作者,自然要考虑同样的问题,我们能给读者带来什么.那么这本书又能给诸君什么呢?首先,我们希望通过这本书,向诸君展示我们喜欢的学习方式;其次,也希望分享微分几何是如何给我们带来乐趣的,换句话说,希望教给学生一些鉴赏数学知识的能力.

在数学中,一般应用“定义—定理—证明—例题”的方式来展示新的数学知识.如果读者已经受过较好的数学训练,采取如此方法是行之有效的,因为他/她已经形成了一种既定的思维模式.例如当看到一个新的定义时,他/她或多或少地会脑补如下问题:这个定义是合理和自然的吗?为什么我们需要这个定义?为什么选择现在这个表达方式?甚至会带着这些问题去学习后面的内容.但是对于一个初学者而言,恐怕很难意识到这些问题,这就需要适当的引导.人们常常说数学学习的目的是学习数学思想,那数学思想又是什么呢?我们觉得这种既定的思维模式应该是数学思想的一个重要组成部分.由于很难用几句话把这种思维模式说清楚,故我们用 $\mathbb{R}^2$ 中的曲线这一个具体的例子,逐步展示这种思维模式.同时这也可以看成是一个关于本书的使用说明.如果把学习比作一趟征途,这篇前言就是初学者能够迅速得到一些基本训练的新手村.

1. $\mathbb{R}^2$ 中光滑曲线的概念

首先一个问题:什么是光滑曲线?直观地讲,我们可以在纸上随意地画出一条线,也可以看一个物体运动后所留下的轨迹.这种描述可以给我们一些体会,但是不够精确,导致无法用数学的方法去研究曲线.为此,我们需要给一个数学的定义,保证可以用自己已有的数学知识来处理它.怎样的数学定义可以帮助我们研究它们?回顾已有可用的数学知识,现在假定,诸君已经学习了数学分析、线性代数和常微分方程这三门基础课程.为了应用这些知识来研究曲线,我们需要用“集合、函数、映射”的标准数学术语给曲线下一个定义.

首先在平面上给出直角坐标系 (x, y) .把曲线看作是一个物体运动后所留下的轨迹,假设运动从时间 $t = a$ 开始到时间 $t = b$ 结束,在时刻 t 时物体所在的位置是平面上的一个点 $(x(t), y(t))$.因此曲线可以看作是一个自变量为时刻 t ,因变

量为平面上的点 $(x(t), y(t))$ 的映射:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}.$$

从直观上看, 我们只考虑连续的曲线, 从而首先假定这些映射是连续的, 即它的两个分量 $x(t), y(t)$ 都是连续函数. 从技术层面考虑, 为了能够使用微积分的工具, 我们需要进一步假设 $x(t), y(t)$ 都是可微的, 有时根据实际的计算过程, 可能还需要 2 次可微、3 次可微等. 为方便起见, 我们一劳永逸地假设它们是任意次可微的, 称之为光滑的 (C^∞ 的).

现在的一个基本问题是

对所有的光滑曲线按其几何形状进行分类.

事实上, 很多数学分支的最基本任务之一就是对所研究的对象进行适当的分类. 回顾在线性代数中, 我们按线性同构的意义对有限维线性空间做了分类; 在抽象代数中, 希望在群同构意义下对群进行分类; 在拓扑学中, 希望在同胚意义下分类拓扑空间, 等等.

此外, 我们还要加入一个技术性的条件

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \neq 0, \quad \forall t \in [a, b].$$

这个条件被称为正则的. 到这里, 你可能看不出这个条件有什么意义, 不知道为什么突然加上这个条件 (这就是我们前面说的不自然). 对! 目前没有办法看出为什么要引入这个条件! 所以, 请带着这个疑问往下看! 回顾我们以前解数学题的经验, 时常会出现思考的过程和写下的解题步骤是顺序颠倒的现象. 比如在做证明题时, 我们思考的过程常常是为了证明题目中的结论 A, 需要先得到某个中间结论 B, 为此又需要先得到 C, 最后发现题设条件可以导出 C. 但是写下来的证明步骤却恰恰相反, 我们先用题设条件导出 C, 再导出 B, 最后用 B 导出最终的结论 A. 那么现在, 这个顺序颠倒的现象又何尝不会出现在学习过程中呢? 事实上, 为了行文逻辑的连贯, 展现在你面前的内容是按照解题步骤编排的, 而不是按思考过程排列的. 这个“正则”的条件, 在往后讨论中, 是多处内容的技术性基石. 因为前言中略去了所有技术性的证明部分, 所以读者只能到第 1 章 1.1 节读完, 才能理解为什么需要这个条件. 认知过程往往并不遵循逻辑顺序, 因此学习的过程并非线性的, 有时需要前后文反复串联起来.

2. 弧长参数化

现在考虑平面上所有的光滑曲线, 即映射 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $x(t)$ 和 $y(t)$ 都是光滑的. 首先注意到, 可能有不同的映射, 其轨迹在平面中相同, 例如:

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, \pi]$$

和

$$\gamma_2(t) = \sqrt{1-t^2}, \quad t \in [-1, 1],$$

作为映射显然是不同的 (因为它们的定义域不同, 对应法则也不同), 但是它们的轨迹都是上半圆周. 对于这种情况, 我们从几何上应该把它们看成同一条曲线, 这形成一个等价关系. 因此, 对所有光滑曲线进行分类的第一步, 即是按照轨迹相同分类.

一个重要的性质是每一条正则曲线所在的等价类 (即具有相同轨迹的正则曲线) 中, 有一个“典则的”表示元: 弧长参数化, 定义如下:

定义 0.1 设 $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是一条光滑曲线, 我们称 t 为一个弧长参数化, 是指满足

$$|\gamma'(t)| \equiv 1, \quad \forall t \in I.$$

这里所谓的“典则”, 根据不同的目标可以有不同的含义, 它是简化问题的一个重要步骤. 举个简单的例子, 如果我们考虑整数, 例如数字“3”, 它有很多等价表示方式, 如 $\frac{6}{2}, \sqrt{9}$ 等, 但是我们一定会用“3”, 因为这是所有表示中最简单的一个. 这就是在所有关于 3 的等价表示方式中要找的“典则”的那个.

关于这个性质的证明我们放在第 1 章中 (它对空间正则曲线也成立, 我们也指出, 这里的正则性条件是重要的). 这个性质说明可以先对所有正则曲线按照轨迹相同分类, 然后在每一类里选取一条弧长参数化的正则曲线, 最后仅仅需要对所有弧长参数化的正则曲线进行分类即可. 弧长参数化的另一个技术上的优势是满足一个额外的方程: $|\gamma'(t)| = 1!$ 这一特点为往后的定量分析带来很多便利.

3. 曲率

现在考虑对所有具有弧长参数化的正则曲线分类. 我们需要设计一个“指标” (也就是一个数值), 对弧长参数化的曲线进行定量的分析, 并用于最终的分类. 举个例子, 比如在对所有线性空间进行分类的时候, 空间的“维数”是一个合适的量. 一方面, 线性同构的线性空间必然有相同的维数; 另一方面, 当两个线性空间具有相同的维数而且有限时, 它们必然线性同构. 这说明维数在线性空间的分类中是一个很合适的指标. 再比如考虑对群进行分类时, 群的阶数 (即元素的个数) 是一个合适的指标. 首先, 同构的群有相同的阶数; 其次, 不同阶数的群必然不同构. 学过拓扑学的读者会知道, 对所有的曲面做同胚分类时, “亏格”是一个合适的指标.

我们考虑对弧长参数化的正则曲线设计一个“指标”. 首先, 希望用它来区分曲线的几何形状, 因为在刚体运动 (平移、旋转、反射) 下几何形状是不变的, 所以这个量也应该在刚体运动下不变. 因为是研究曲线, 也许直观上, 如果有一个量能够反映出曲线“弯曲的程度”, 那么这一定是一个重要的量, 我们称它为“曲

率”。当然, 如果要反映出弯曲的程度, 那么对于直线, 不发生弯曲, 曲率这个量应该就是零. 总结起来, 我们希望对曲线定义一个量, 称之为曲率, 使之满足条件:

(1) 曲率在刚体运动下不变;

(2) 直线的曲率处处为零; 直观上, 也许还应该希望“越弯曲, 曲率越大”.

从以上条件 (1), 立即可以看出圆周应该处处曲率相同, 因为在刚体运动下, 圆周处处一致. 因此, 圆周的曲率应该处处相等. 同时注意到, 圆周半径越大, 直观上的“弯曲的程度”反而越小. 因此, 对于圆周, 曲率的一个可供选择的定义方式是半径的倒数 (这个选择方式当然不唯一, 但是这是满足条件的最简单的方式). 这样我们就先定义了圆周的曲率, 对于一般的正则曲线, 我们设法将它和圆周进行比较. 设 γ 为一条正则曲线, 点 $x \in \gamma$. 我们称一个圆周 C 外切 γ 于 x 是指 $C \cap \gamma = \{x\}$ 且 γ 落在圆周之外. 如果圆周 C 的半径为 R , 圆心为 x_0 , 此即是 $|x - x_0| = R$ 且 $|y - x_0| > R, y \in \gamma$ 且 $y \neq x$.

定义 0.2 设 γ 为一条正则曲线, 点 $x \in \gamma$. γ 在 x 处的曲率定义为 (见图 0.1)

$$\kappa(x) := \frac{1}{\sup\{R > 0 \mid \text{存在两个半径为 } R \text{ 的圆周在 } \gamma \text{ 的两侧, 分别与 } \gamma \text{ 外切于 } x\}}.$$

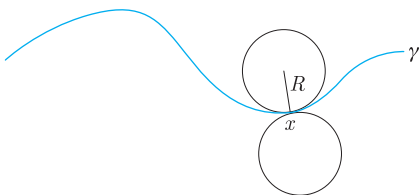


图 0.1 平面曲线的曲率

这种定义方式显然在刚体运动下是不变的. 对于直线 γ , 也容易理解它两边可以放入任意大半径的圆周与之相外切. 事实上, 在微分几何中, 常见的方式就是先对一些简单具体的几何对象做研究, 再把一般的情形和这些简单的对象做比较.

我们引入曲率的主要目的是对正则曲线做定量研究 (当然, 曲率是一个基本的几何量, 事实上有很多不同的目的, 都殊途同归地导致应该引入曲率), 因此一个关键的问题是如何计算, 至少要有合适的估算方法. 试想一下, 比如去医院体检时, 血压是一个反映健康的重要指标, 但如果无法测出血压, 那还是无法得到任何有用的信息. 为了计算曲率, 我们有如下定理:

定理 0.1 设 $\gamma(s)$ 为一条弧长参数化的正则曲线, 点 $x = \gamma(s_0)$. 则 γ 在 x 处的曲率满足

$$\kappa(x) = |\gamma''(s_0)|.$$

这是一个利用弧长参数化的曲率计算公式, 为了更加连贯地介绍我们的想法, 我们在这里略去这个定理的证明. 建议读者作为一个练习, 从这个定理出发, 推导出一般正则曲线 (不必弧长参数化) 的曲率计算公式.

从这个定理, 我们可以看到, 曲率不但能够精确计算, 而且计算十分简单! (对弧长参数化求导两次, 再算向量模长, 仅仅使用了最基本的微积分知识.)

4. 基本定理

现在我们已经有了一个定量的“指标”——曲率. 下一步自然是看怎么应用于分类. 这就是要分析, 如果两条正则曲线具有相同的曲率, 那么我们能对二者的形状上说出什么样的关系. 类比以往的知识, 在线性代数中, (有限维) 线性空间具有相同的维数时, 我们知道二者线性同构; 在拓扑学中, 两个二维定向曲面有相同的亏格时, 二者同胚.

设 $\gamma_1(s), \gamma_2(s)$ 是两条弧长参数化的正则曲线, $s \in (a, b)$, 假设它们具有相同的曲率 $\kappa_1(s) = \kappa_2(s), \forall s \in (a, b)$. 我们先用“很粗略很不严格的”形式计算去推进想法. $\gamma_1(s), \gamma_2(s)$ 是两个值域在 $\mathbb{R}^2$ 中的映射, 我们首先十分粗略地把它们简化成函数 (即把值域从 $\mathbb{R}^2$ 简化到 $\mathbb{R}^1$). 当然这是极不严格的, 我们没有任何理由可以做如此简化! 但是这么做的理由是: 如果连对简化后的版本, 我们尚无法分析, 那原先的问题就更加无从入手了; 而且我们也只是想通过分析这个简化的版本来探一探思路. 考虑简化后的版本, 把它们在 $s = s_0$ 处做 Taylor 展开:

$$\gamma_i(s) = \gamma_i(s_0) + \gamma'_i(s_0)(s - s_0) + \gamma''_i(s_0)\frac{(s - s_0)^2}{2} + o((s - s_0)^2), \quad i = 1, 2,$$

我们发现曲率出现在 2 阶项. 回忆在微积分中, 比较两个函数的大小关系时, 先比较 0 阶项 (即函数值本身), 如果 0 阶项相同, 再继续比较 1 阶项; 如果 1 阶项也相同, 我们继续比较 2 阶项, 以此类推下去. 因为曲率出现在 2 阶项上, 若要它能够有效地反映出 γ_1 和 γ_2 的关系, 我们必须设法控制 γ_1, γ_2 的 0 阶项和 1 阶项使之相同. 现在考虑 $\gamma_1(s)$, 通过上下平移, 可以任意改变 0 阶项 (即函数的值 $\gamma_1(s_0)$); 通过旋转, 可以任意改变 1 阶导数 $\gamma'_1(s_0)$. 幸运的是这些都属于刚体运动, 不会改变几何形状. 因此, 对 $\gamma_1(s)$ 做刚体运动, 可以使它和 γ_2 在 s_0 处具有相同的 0 阶项和 1 阶项. 总结起来, 给定一个点 $s_0 \in (a, b)$, 我们可以通过刚体运动使得 $\gamma_1(s_0) = \gamma_2(s_0)$ 和 $\gamma'_1(s_0) = \gamma'_2(s_0)$, 以及

$$|\gamma''_1(s)| = |\gamma''_2(s)| \quad \text{对任意 } s \in (a, b) \text{ 成立} \quad (\text{因为 } \kappa_1(s) = \kappa_2(s)).$$

这预示着如果 γ''_1 和 γ''_2 同号, 则 $\gamma_1 \equiv \gamma_2$; 如果 γ''_1 和 γ''_2 异号, 我们先重置 γ_1 为 $-\gamma_1$, 这是一个平面上关于 x 轴的反射 (依然是一个刚体运动), 就可以化成前面的情形. 至此, 可以粗略地认为对这个简化的版本, 我们可以很好地利用微积分的知识分析出结论: 在相差一个刚体运动下, $\gamma_1 = \gamma_2$, 即二者形状相同!

现在让我们观察以上想法哪些可以拓展到原先的问题 (即 $\gamma_1(s), \gamma_2(s)$ 的值域在 $\mathbb{R}^2$ 中). 我们记 $\gamma_1(s) = (x_1(s), y_1(s))$ 和 $\gamma_2(s) = (x_2(s), y_2(s))$. 第一步: Taylor 展开, 我们可以看成各个分量 $x_1(s), y_1(s), x_2(s), y_2(s)$ 的 Taylor 展开. 第二步: 通过刚体运动使得 $\gamma_1(s_0) = \gamma_2(s_0)$ 和 $\gamma_1'(s_0) = \gamma_2'(s_0)$, 这一步不需要任何改变, 也是成立的. 第三步: 从 $|\gamma_1''(s)| = |\gamma_2''(s)|$ 分析 γ_1 和 γ_2 的关系, 这一步基本无法拓展, 因为此时

$$|\gamma_1''(s)| = |\gamma_2''(s)| \iff [x_1''(s)]^2 + [y_1''(s)]^2 = [x_2''(s)]^2 + [y_2''(s)]^2.$$

一方面, 这是一个关于 $x(s), y(s)$ 的二阶常微分方程, 在 $s = s_0$ 处有相同初值条件 (0 阶和 1 阶都相同), 常微分方程理论中解的唯一性 “几乎可以” 说明 γ_1, γ_2 相同. 这里用 “几乎可以”, 是因为这个方程不是线性方程 (甚至对 2 阶导数都不是线性的), 不能直接套用常微分方程的经典理论. 但是, 现在我们可以确定基本的思考路线, 因为前面两步都是可用的, 只是最后一步应用常微分方程理论有困难. 这个困难被 Frenet 克服了, 他把这个方程转化成了一个线性常微分方程组, 我们在下一段中来学习他的解决方法.

考虑弧长参数化的方程 $|\gamma'(s)| = 1$, 从而 $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 1$, 这里 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的内积. 两边对 s 求导可得

$$\langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle = 0.$$

这说明 $\gamma''(s)$ 和 $\gamma'(s)$ 垂直. 回顾 $\gamma'(s)$ 是曲线 γ 在 s 处的切向量, 与此垂直的单位向量叫法向量 $n(s)$ (有正负两个方向可以选择). 注意 $\gamma''(s)$ 也和 $\gamma'(s)$ 垂直, 所以可以选 $n(s)$ 和 $\gamma''(s)$ 有相同的方向. 利用 $|\gamma''(s)| = \kappa(s)$, 我们有

$$\gamma''(s) = \kappa(s) \cdot n(s).$$

再由方程 $|n(s)| = 1$ (因为它是单位的) 同样对 s 求导, 可得 $\langle n'(s), n(s) \rangle = 0$, 这说明 $n'(s)$ 和 $n(s)$ 也是垂直的. 因为在平面上, 和 $n(s)$ 垂直的向量一定是沿着 $\gamma'(s)$ 所在的方向, 所以我们可以设

$$n'(s) = l(s) \cdot \gamma'(s),$$

这里 $l(s)$ 待定. 注意到还有 $\langle \gamma'(s), n(s) \rangle = 0$, 两边对 s 求导可得

$$\langle \gamma''(s), n(s) \rangle + \langle \gamma'(s), n'(s) \rangle = 0.$$

代入 $\gamma'' = \kappa \cdot n$ 和 $n' = l \cdot \gamma'$, 以及 γ', n 是单位的, 可以得到 $\kappa + l = 0$, 因此

$$l(s) = -\kappa(s).$$

考虑 $\gamma(s)$ 处的切向量 $T(s) := \gamma'(s)$ 和法向量 $n(s)$ ($(T(s), n(s))$ 被称为 Frenet 标架), 可以得到方程

$$T'(s) = \kappa(s) \cdot n(s), \quad n'(s) = -\kappa(s) \cdot T(s).$$

这是一个线性常微分方程组! (也可以把 T' 再求导一次, 并代入 $n' = -\kappa \cdot T$ 和 $n = T'/\kappa$, 得到关于 T 的一个 2 阶线性常微分方程.) 至此, 利用常微分方程理论, 我们可以理解如下结论:

定理 0.2 设 $\gamma_1(s), \gamma_2(s)$ 是两条弧长参数化的正则曲线, $s \in (a, b)$. 如果二者具有相同的曲率 $\kappa_1(s) \equiv \kappa_2(s)$, 则存在一个 $\mathbb{R}^2$ 上的刚体运动 F 使得 $F \circ \gamma_1 = \gamma_2$. 即它们有相同的形状.

现在, 从这个定理可知, 正则曲线可以用曲率完全地分类, 所以我们称之为平面曲线的基本定理.

5. 总结

在学习时需要有个主线, 所谓纲举目张. 在数学学习中, 主线常常是一个贯穿整个篇幅的问题, 这就是常说的“带着问题学习”. 那么这本书中的主线是什么呢? 以第一章为例. 在前三节中, 我们讨论空间中的光滑曲线, 当然可以考虑的问题是对所有的空间曲线进行分类; 后三节中讨论空间中的光滑曲面, 可以如法炮制地考虑对如此的曲面进行分类. 对于这些问题, 平面正则曲线的分类给了我们一个基本的思考的范本, 我们可以沿着它的路线一步一步分析. 为此, 现在总结平面曲线分类时的基本步骤:

第一步: 用“集合、函数、映射”等数学术语陈述什么是曲线, 这是把问题转化成数学问题的基础. (事实上, 这是把数学知识应用于所有科学问题的公共第一步.)

第二步: 弧长参数化. 目的是在曲线的所有不同的参数化中, 选一个相对“好用的”.

第三步: 曲率, 一个设计出来用于定量分析曲线的“弯曲程度”的“指标”.

第四步: 应用 Frenet 标架分析曲率相同的正则曲线, 并完成正则曲线的分类.

如果说前面三步的内容还属于有迹可循、不难理解的话, 最后的 Frenet 标架就是一个天才的想法, 神来之笔, 必须承认, 即使是现在, 笔者也完全看不出他当年是如何想到的. 如果不用他的方法, 我们又完全想不到别的方法可以证明这个基本定理. 所以我们唯一可以做的就是跟他学习. 感觉上既心有不甘, 又庆幸有攻略可以借鉴.

下面我们来考虑三维空间中光滑曲线的分类. 首先第一步是把曲线转化成数学语言, 并且引入正则性条件, 第二步给出弧长参数化, 这两步本质上和平面曲线方法类似, 我们在第一章 1.1 节中给出. 第三步, 考虑“曲率”这个量, 我们会发现

以上定义 0.2 中的直观方式无法推广到空间曲线 (因为空间曲线没有“两侧”的概念), 但可以用定理 0.1 中的等价性质作为定义, 回顾在讨论引入曲率的目标时, 给出了曲率应该是满足如上的 (1) 和 (2), 这样你能够理解为什么在空间曲线曲率定义给出后, 需要验证其在刚体运动下是不变的. 这些内容在 1.2 节中给出. 最后来到第四步, 分析曲率相同的正则曲线. 也许有人能很快注意到有例子表明存在两条曲率相同但是形状不同的空间曲线, 这就说明平面曲线基本定理不适用于空间曲线, 此时我们需要分析 Frenet 标架方法应用到空间曲线时, 到底哪一步出了问题. 当然, 你也许并没有注意到有曲率相同而形状不同的空间曲线, 那么这时自然会直接采用 Frenet 标架方法来试图证明类似以上基本定理的结论. 不论是哪种情况, 你都会发现 Frenet 方法中有一处在空间曲线上无法成立 (事实上, 由 $n'(s)$ 和 $n(s)$ 相互垂直, 在三维空间中无法得到 $n'(s)$ 是 $\gamma'(s)$ 的倍数). 这正是需要设法修正的地方, 这个过程中, 就自然地会发现, 除了曲率, 还需要一个新的量, 才能导出相应的 Frenet 的方程组. 这个量称为“挠率”. 为了行文更加合乎逻辑顺序, 我们先在 1.2 节中介绍挠率, 它和曲率具有相似的功能, 都用来定量分析曲线的形状. 最后在 1.3 节中用 Frenet 的方法完成空间曲线的基本定理. 因此, 在学完第一章的前三节之后, 建议诸君应该停下来好好捋一捋曲线分类 (即空间曲线基本定理) 的思路, 并好好和平面曲线分类的过程做个比较.

完成了三维空间曲线的部分之后, 我们转到三维空间中的光滑曲面, 这构成了第一章的后三节. 我们同样用以上基本步骤展开: 第一步, 将曲面用数学语言给出, 并引入正则性条件. 第二步, 寻找一个“典则的”参数化表示. 很不幸, 现在没有类似于弧长参数化这么好用的表示了. 因此, 我们不得不分析一般参数化之间的变换关系, 这些是 1.4 节的内容. 随后在 1.5 节中我们开始考虑如何理解“曲面的弯曲程度”, 即如何定义曲面的曲率, 在最后一节讨论如何利用 Frenet 标架的想法得到标架运动方程, 并最终得到曲面的基本定理. 这些内容的详细想法留待读者自己体会. 总之, 它们是统一的配方、不同的细节. 而恰恰是这些不同的细节, 让一个个故事变得跌宕起伏, 有趣无比.

第一章构成了曲线与曲面理论的经典内容, 这些内容可以在 24 课时完成, 我们在其中加入了大量的例子、注记和习题来辅助理解.

在第二章中我们讨论曲面的内蕴几何. 虽然为了方便起见, 我们把很多解释放在三维空间中, 但本质上是不依赖于三维空间的, 甚至可以将其看成讨论四维、五维等更高维数空间中的曲面. 虽然我们讨论的几何对象越来越广泛和复杂, 但是仍然可以按照上面的基本步骤去学习. 当然, 对象越复杂, 每一步需要做的工作自然越多, 全面地分类也变得越困难. 例如, 在微分几何中最重要的量——曲率, 对于曲线, 用弧长参数化的 2 阶导数就可以定义, 对于三维空间中的曲面, 则需要借助 Gauss 映射等方式来定义曲率, 而到了内蕴几何部分, 我们甚至需要返

回到从重新审视“导数”的概念开始. 在内蕴几何这部分, 我们沿着这个基本步骤, 仅仅能介绍到具有常曲率的这类特殊曲面的分类结果以及 Gauss-Bonnet 定理. 这部分可以在 20—24 课时中完成.

到第三章中, 我们将抽象曲面理论推广到高维, 开始介绍现代几何学的主要研究对象之一——微分流形. 对比以上基本步骤, 这里仅仅完成了第一步: 将讨论对象转化成数学语言, 并给出其上的微积分学. 之后的每一步都是一个很大的领域, 并形成了微分几何诸多的不同分支, 有待诸君未来去开拓.

除了主线问题之外, 微分几何还有许多重要性不亚于本书主线的副本, 例如第二章最后的 Gauss-Bonnet 公式以及第四章中的专题内容.

在本书的编写过程中, 感谢中山大学的李婷婷、彭昱、叶映慧三位博士生, 她们细致阅读了本书初稿. 也特别感谢高等教育出版社的编辑, 他们的努力使本书大为增色. 由于作者们的知识水平和时间精力有限, 书中难免存在疏漏和不足, 欢迎各位读者批评指正.

黎俊彬、袁伟、张会春

2024 年 7 月于中山大学康乐园